Maximale Unterverbände endlicher distributiver Verbände

Diplomarbeit

der Philosophisch-naturwissenschaftlichen Fakultät

der Universität Bern

vorgelegt von

Daniel Steiner

1999

Leiter der Arbeit:

Prof. Dr. Jürg Schmid

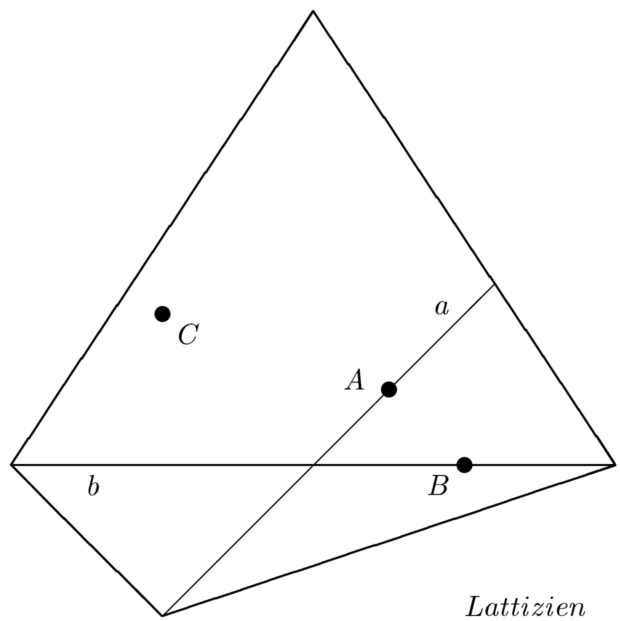
Mathematisches Institut

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

Liebe Leserin, lieber Leser,

Lassen Sie sich zuerst auf eine mathematisch motivierte Reise mitnehmen, die uns ins Land Lattizien führt. Dieses ist, der Anschaulichkeit halber, lediglich aus verschiedenen Ortschaften und Verkehrswegen aufgebaut und könnte somit wie folgt aussehen:



Nach einer ersten Konsultation der obigen Skizze werden wir uns wohl einig sein, dass

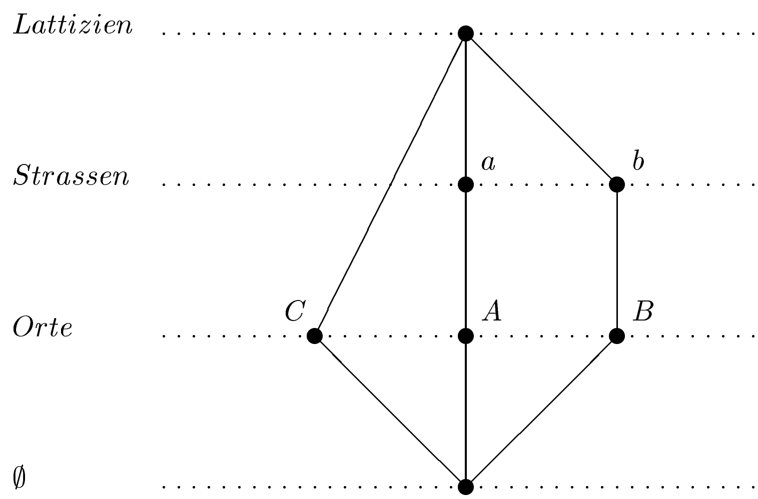
- jede Ortschaft sich mindestens in Lattizien befindet und sogar an einer Verkehrsroute liegen kann,
- jeder Verkehrsweg auf lattizischem Boden ist.

Ausgehend von den Ortschaften wollen wir für unser Beispiel nun all jene Aussagen bestimmen, in denen die sprachliche Form "**befindet sich an/in**" sinnvoll vorkommen kann. Es ergeben sich folgende Sätze:

- Die Ortschaft C **befindet sich in** Lattizien.
- Die Ortschaft A **befindet sich an** der Strasse a, welche sich **in** Lattizien **befindet**.
- Die Ortschaft B **befindet sich an** der Strasse b, welche sich **in** Lattizien **befindet**.

Sie werden sich wohl langsam fragen, was diese kleine Gedankenreise mit Mathematik zu tun haben soll.

Unter der spezifisch mathematischen Annahme, dass sich die leere Menge $\emptyset$ in jeder Ortschaft Lattiziens befindet und unter Berücksichtigung seiner, durch die sprachliche Relation "**befindet sich an/in**" gegliederten, Struktur von Orten und Strassen können wir Lattizien als Beispiel eines geometrisch motivierten Verbandes betrachten. Als Illustration der erwähnten Gliederung Lattiziens zeichnen wir die lattizischen Objekte gleicher Art, mitsamt der leeren Menge und Lattizien als solches, jeweils auf eine Linie. Anschliessend verbinden wir je zwei Objekte verschiedener Hierarchiestufen mit einer Linie, wenn sie paarweise in einer der obenstehenden Aussagen auftreten (samt dem Spezialfall der leeren Menge). Auf diese Weise gelangen wir zum folgenden Diagramm:



Versehen mit zusätzlichen Eigenschaften wird uns die mathematische Struktur von Verbänden durch die ganze nachfolgende Diplomarbeit begleiten und beschäftigen.

Die Basis der vorliegenden Diplomarbeit liegt in einer Veröffentlichung von M.E. Adams, Ph. Dwinger und J. Schmid [1], welche 1996 publiziert wurde. Die Autoren untersuchen echte maximale Unterverbände endlicher distributiver Verbände L und deren Durchschnitt, den Frattini-Unterverband $\Phi(L)$. Dabei erhalten sie einige interessante algebraische (und arithmetische) Eigenschaften für diese Unterstrukturen. Eine entscheidende Rolle in ihren Überlegungen spielen dabei die Begriffe der "vertikal kontrahierten" bzw. "horizontal kontrahierten" Posets P, deren Äquivalenzklassen verblüffenderweise dual zu den Komplementen von maximalen Unterverbänden endlicher distributiver Verbände bestimmt sind [[1], Bemerkung 3.4]. Adams, Dwinger und Schmid beweisen in der Folge u.a. die Äquivalenz zwischen der vertikalen Kontraktion eines durch die Birkhoff-Dualität zugeordneten Posets $\mathfrak{J}(L)$ und dem Frattini-Unterverband $\Phi(L)$, welcher sich zugleich als Durchschnitt bestimmter Unterverbände von L erweist [[1], Theorem 4.2].

Die in der obenerwähnten Bemerkung postulierte Dualität zwischen den Äquivalenzklassen vertikal kontrahierter Posets und den Komplementen maximaler Unterverbände soll unser Ausgangspunkt, den es eingehender zu untersuchen gilt, darstellen. Dabei wird die Fragestellung, welche Auswirkungen eine vertikale Kontraktion im dual zugeordneten Verband zeitigt, von wegweisendem Charakter sein. Beiläufig ergeben sich aber auch strukturelle Aussagen für maximale Unterverbände bzw. deren Komplemente, die in ihrer Einfachheit wohl überraschen.

Im **zweiten Kapitel** dieser Arbeit geben wir eine zweckdienliche Einführung in die Verbandstheorie und definieren die für unsere Zwecke wichtigen Begriffe wie “distributiver Verband”, “dualer Poset” und “dualer Verband”. Als unverzichtbares und mächtiges Werkzeug zur Übersetzung unserer Fragestellungen bezüglich endlicher distributiver Verbände in die tendenziell kleineren Strukturen von endlichen Posets soll die Birkhoff-Dualität herangezogen werden, welche in einem abschliessenden Teil vorgestellt wird.

Das **dritte Kapitel** widmet sich in einem ersten Abschnitt der Charakterisierung von maximalen Unterverbänden und deren Komplementen nach Rival [7]. Unter Berücksichtigung verschiedener Formen von Komplementen maximaler Unterverbände sollen anschliessend Bedingungen an Posets aufgestellt werden, die ein Auftreten der erwähnten Komplemente im zugehörenden dualen Verband garantieren. Als Nebenprodukt dieser Betrachtungen ergibt sich schliesslich die strukturelle Aussage, wonach Komplemente maximaler Unterverbände stets in mindestens dreifacher Ausführung im zugrundeliegenden Verband auftreten.

Mit dem abschliessenden **vierten Kapitel** und dem Theorem 3 wird die Frage beantwortet, wie sich eine vertikale Kontraktion eines Posets im zugehörigen dualen Verband auswirkt. Nebst der Tatsache, dass der Übergang von einem Verband L zu seinem Frattini-Unterverband $\Phi(L)$ keiner echten vertikalen Kontraktion entsprechen kann, sollen aber auch naheliegende Verbandsoperationen definiert werden, die umgekehrt auf der Poset-Seite echte vertikale Kontraktionen induzieren.

Schliesslich werden in einem **Ausblick** weitere mögliche Fragen skizziert, welche sich unmittelbar aus der vorangehenden Arbeit ergeben.

Mein besonderer Dank geht an Herrn Prof. Dr. Jürg Schmid, der mich im Laufe der vergangenen Monate betreute und mit vielen Ideen und grosser

Flexibilität einen wesentlichen Anteil am Gelingen dieser Arbeit hat. Ebenso möchte ich allen herzlich danken, die mich im Laufe des Mathematik-Studiums in anderer wertvoller Weise unterstützt haben.

Dürrenroth, 11. September 1999 Daniel Steiner[1]

[1]Mathematisches Institut der Universität Bern
Sidlerstrasse 5
CH-3012 Bern
dsteiner@math-stat.unibe.ch

2 Allgemeine Vorbereitungen

2.1 Definitionen

Im folgenden Kapitel führen wir die für unsere weiteren Ausführungen grundlegenden Begriffe und Ideen ein. Diese sollen hier in einer genügend allgemeinen Form gefasst werden. Stehen mehrere gleichwertige Definitionen zur Verfügung, so wird die für unsere Zwecke nützlichste Form gewählt.

Definition 2.1.1.
Sei P eine Menge. Eine ***Teilordnung*** *auf P ist eine binäre Relation $\leq$ auf P, so dass für alle $x, y, z \in P$ gilt:*

(i)	$x \leq x$	*(Reflexivität)*
(ii)	*Aus $x \leq y$ und $y \leq x$ folgt $x = y$.*	*(Antisymmetrie)*
(iii)	*Aus $x \leq y$ und $y \leq z$ folgt $x \leq z$.*	*(Transitivität)*

Wir nennen zwei Elemente $x, y \in P$ ***vergleichbar****, wenn $x \leq y$ oder $y \leq x$ gilt. Andernfalls bezeichnen wir zwei* ***unvergleichbare*** *Elemente mit $x \| y$.*

Bemerkung 2.1.2. *Die vorangehende Definition gibt uns die Möglichkeit, die strenge Ungleichheitsrelation $<$ wie folgt zu definieren:*

$$x < y \Longleftrightarrow x \leq y \text{ und } x \neq y \quad (x, y \in P)$$

Definition 2.1.3.
Eine ***teilgeordnete Menge (Poset)*** *ist ein Paar $(P, \leq)$, wobei P eine Menge und $\leq$ eine Teilordnung auf P darstellt.*

Bemerkung 2.1.4. *Gilt zusätzlich zu den Eigenschaften (i)-(iii) in Definition 2.1.1 für alle $x, y \in P$*

(iv)	*$x \leq y$ oder $y \leq x$,*	*(Linearität)*

so sprechen wir von einer ***Ordnung*** *bzw. von einer* ***geordneten Menge****.*

Beispiel 2.1.5. *Der Poset $(\{1, 2, \ldots, n\}, \leq)$, welcher mit $\boldsymbol{n}$ bezeichnet wird, stellt wohl das einfachste Beispiel einer geordneten Menge dar.*
Wird demgegenüber $\{1, 2, \ldots, n\}$ als ungeordnete Menge betrachtet, d.h. es gilt $a \| b$ für $a \neq b$, so geben wir die entsprechende teilgeordnete Menge mit $\bar{\boldsymbol{n}}$ wieder (vgl. Abbildung 10).

Definition 2.1.6.
Zwei Elemente $x, y \in P$ sind ***benachbart****, falls $x < y$ oder $y < x$ erfüllt ist und kein Element $z \in P$ existiert mit $x < z < y$ bzw. $y < z < x$. In diesem Fall schreiben wir $x \prec y$ bzw. $y \prec x$.*

Definition 2.1.7.
P sei eine teilgeordnete Menge, $Q \subseteq P$. Ein Element $b \in Q$ ist ***maximal (minimal)*** *in Q, wenn kein Element $x \in Q$ mit $x > b$ $(x < b)$ existiert.*

Aus noch zu klärenden Gründen (vgl. Kapitel 2.2) werden wir uns in dieser Diplomarbeit auf endliche teilgeordnete Mengen $(P, \leq)$ beschränken. Diese können zeichnerisch als **Liniendiagramme** oder **Hasse-Diagramme** dargestellt werden (vgl. das Diagramm im Vorwort).
Dabei geben wir die Elemente von P als kleine Kreise in der Anschauungsebene wieder. Sind zwei Elemente benachbart, so wird das grössere Element mit einer grösseren y-Koordinate oberhalb des kleineren Elementes gezeichnet und mit einer Linie verbunden.

Abbildung 1 zeigt ein weiteres Beispiel einer teilgeordneten Menge P, welche als eine bestimmte Äquivalenzklasse von Posets im vierten Kapitel noch genauer untersucht wird.
Wir stellen fest, dass a, b und e, f zwei Paare unvergleichbarer Elemente in P sind. e und f treten als maximale Elemente in P auf, währenddem sich a und b als minimal in P herausstellen.

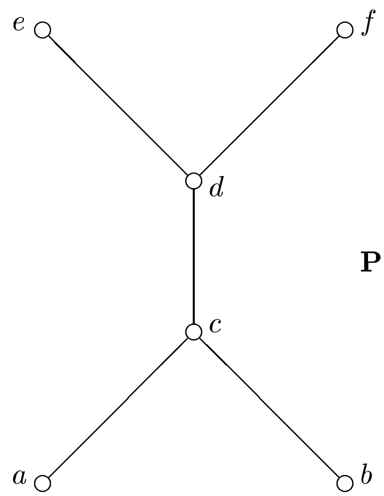


Abbildung 1: Beispiel einer teilgeordneten Menge P

Da $x < y$ genau dann gilt, wenn y durch einen aufsteigenden Linienzug von x aus erreicht werden kann, ist es möglich, die dem Poset zugrundeliegende Teilordnung aus einem Liniendiagramm abzulesen. Nachfolgend sollen die nichttrivialen Ordnungsbeziehungen aus Abbildung 1 wiedergegeben werden:

$$a \leq c,\ b \leq c,\ c \leq d,\ d \leq e,\ d \leq f$$

Nun wenden wir uns dem Begriff der **absteigenden Menge** zu. Diese speziellen Teilmengen von Posets werden uns einerseits zu Bemerkungen zum **Dualitätsprinzip** für Posets veranlassen, andererseits werden sie im Rahmen der **Birkhoff-Dualität** (vgl. Theorem 1) eine zentrale Rolle übernehmen.

Definition 2.1.8.
$(P, \leq)$ sei ein Poset und $Q \subseteq P$ eine Teilmenge. Q ist eine ***absteigende Menge*** *(Ordnungsideal), wenn aus $x \in Q$, $y \in P$ und $y \leq x$ folgt: $y \in Q$.*

Wird die Ordnungsrelation $\leq$ durch die inverse Relation $\geq$ ersetzt, erhalten wir den zu $(P, \leq)$ dualen Poset $(P, \geq) = (P, \leq)^d$. Aus Aussagen in $(P, \leq)$, die ausser rein logischen Bestandteilen nur das Zeichen $\leq$ enthalten, bekommen wir die duale Aussage im dualen Poset $(P, \geq) = (P, \leq)^d$, indem wir alle vorkommenden Zeichen $\leq$ durch $\geq$ ersetzen. In Sätzen mit zwei zueinander dualen Aussagen wird meist nur eine Aussage bewiesen; die duale Aussage ergibt sich mit dem gleichen Beweis und der inversen Ordnung.
Somit folgt aus dem Begriff der absteigenden Menge dual der Begriff der aufsteigenden Menge.

Definition 2.1.9.
Mit $(\mathfrak{O}(P), \subseteq)$ bezeichnen wir die Familie aller absteigenden Mengen eines Posets P, geordnet durch $\subseteq$.
Für $Q \subseteq P$ und $x \in P$ definieren wir die folgenden absteigenden Mengen:

$$\downarrow Q = \{y \in P \mid (\exists\, x \in Q)\ \ y \leq x\} \quad \text{ und } \quad \downarrow x = \{y \in P \mid y \leq x\}.$$

Bemerkung 2.1.10. *Offensichtlich ist eine Teilmenge $Q \subseteq P$ genau dann eine absteigende Menge, wenn $Q = \downarrow Q$ gilt.*

Ein möglicher Zusammenhang zwischen auf- und absteigenden Mengen kommt im folgenden Hilfssatz zum Ausdruck:

Lemma 2.1.11.
Eine Teilmenge $Q \subseteq P$ ist genau dann eine absteigende Menge, wenn $P \setminus Q$ eine aufsteigende Menge ist.

Beweis. $\Longrightarrow$: Sei Q eine beliebige absteigende Menge.
Zeige: $P \setminus Q$ ist eine aufsteigende Menge. Dies ist genau dann der Fall, wenn aus $x \in P \setminus Q$, $y \in P$, $y \geq x$ folgt: $y \in P \setminus Q$.
Wegen $Q \cup (P \setminus Q) = P$ und $Q \cap (P \setminus Q) = \emptyset$ muss $y \in Q$ oder $y \in P \setminus Q$ gelten. Wäre $y \in Q$, so müsste für $x \leq y$, $x \in P \setminus Q \subseteq P$ nach Def. 2.1.8 und der Voraussetzung $x \in Q$ gelten, was nicht möglich ist. Also kann nur $y \in P \setminus Q$ auftreten.

$\Longleftarrow$: analoges Vorgehen.

□

Im Folgenden wollen wir eine Aussage beweisen, die sich im Verlauf der Arbeit noch als sehr nützlich erweisen wird und welche die Nachbarschaftsbeziehungen in $(\mathfrak{O}(P), \subseteq)$ etwas beleuchtet.

Lemma 2.1.12.
A und B seien absteigende Mengen in $(P, \leq)$. $A \prec B$ gilt genau dann in $(\mathfrak{O}(P), \subseteq)$, wenn $B = A \cup \{b\}$ für ein in $P \setminus A$ minimales Element b ist.

Beweis. $\Longrightarrow$: Seien $A, B \in (\mathfrak{O}(P), \subseteq)$ beliebig. Aus $A \prec B$ folgt unmittelbar $A \subset^2 B$. Somit $\exists\, b \in B, b \notin A$, d.h. $b \in P \setminus A$.

1. b ist minimal in $P \setminus A$: Wäre b nicht minimal, so würde ein $c \in P \setminus A$ mit $c < b$, d.h. $c \in \downarrow b \setminus \{b\}$, existieren. Somit wäre $A \cup \{b\}$ keine absteigende Menge, da aus $c \in P \setminus A \subseteq P$, $b \in A \cup \{b\}$ und $c < b$ auch $c \in A \cup \{b\}$ und damit $c \in A$ folgen müsste. Widerspruch. Jedes Element, das in $B \setminus A$ liegt, ist also minimal in $P \setminus A$.

2. $B = A \cup \{b\}$: Wäre $B = A \cup \{b\} \cup C$ mit $C = \{c_i \in P \mid c_i \notin A,\ c_i \neq b,$ c_i minimal in $P \setminus A$ für $i = 1, 2, 3, ...\} \neq \emptyset$ benachbart zu A, so würde beispielsweise $A \subset A \cup \{b\} \subset A \cup \{b\} \cup C = B$ gelten, was im Widerspruch zu $A \prec B$ stünde.

$\Longleftarrow$: Sei $B = A \cup \{b\}$, b minimal in $P \setminus A$ gegeben. Wären A und B nicht benachbart, so $\exists\, C \in (\mathfrak{O}(P), \subseteq)$ mit $A \subset C \subset A \cup \{b\}$. Daraus folgt, dass mindestens ein $x \in C, x \notin A$ existiert. Nach Voraussetzung folgt daraus aber auch $x \in A \cup \{b\}$, was wegen $x \notin A$ deshalb $x \in \{b\}$ und $x = b$ nach sich zieht, d.h. $C = A \cup \{b\}$. Widerspruch.

$\square$

Definition 2.1.13.
*Sei $(P, \leq)$ ein Poset, $Q \subseteq P$ eine beliebige Teilmenge. Eine **untere Schranke** von Q ist ein Element $s \in P$ mit $s \leq q$ $(\forall q \in Q)$. Dual wird eine **obere Schranke** definiert.*
*Gibt es in der Menge der unteren Schranken von Q eine grösste, so wird diese das **Infimum**, $\bigwedge Q$, genannt, dual dazu wird die kleinste obere Schranke von Q **Supremum** genannt und mit $\bigvee Q$ bezeichnet. Im Spezialfall einer zweielementigen Menge $Q = \{x, y\}$ wird das Infimum als $x \wedge y$ und das Supremum als $x \vee y$ dargestellt.*

Damit sind wir bereit, den für unsere Arbeit grundlegenden Begriff eines "Verbandes" formal einzuführen:

Definition 2.1.14.
*Eine teilgeordnete Menge $(P, \leq)$ ist ein **Verband**, wenn zu je zwei Elementen $x, y \in P$ stets das Infimum $x \wedge y$ und das Supremum $x \vee y$ existieren. Eine Teilmenge U eines Verbandes P, die sowohl gegen Suprema wie auch gegen Infima abgeschlossen ist, nennen wir einen **Unterverband**. Falls zu jeder beliebigen Teilmenge $Q \subseteq P$ das Supremum, $\bigvee Q$, und das Infimum, $\bigwedge Q$, existieren, nennen wir P einen **vollständigen Verband**.*

Bemerkung 2.1.15. *Ein endlicher Verband $(P, \leq)$ ist naturgemäss bereits vollständig [vgl. [4], Korollar 2.12] und besitzt damit sowohl ein grösstes Element, das Einselement $\mathbf{1_P} \doteq \bigvee P$, wie auch ein kleinstes Element, das Nullelement $\mathbf{0_P} \doteq \bigwedge P$.*

[2] $A \subset B \Longleftrightarrow A \subseteq B$ und $A \neq B$

Bemerkung 2.1.16. *Die binären Operationen $\wedge$ und $\vee$ aus Def. 2.1.13 verfügen in einem Verband P über Eigenschaften, welche grosse Ähnlichkeiten zu den wohlbekannten Gesetzen der Addition und Multiplikation in $\mathbb{R}$ aufweisen. Für alle $x, y, z \in P$ gilt:*

(i)	$x \wedge x = x$, $x \vee x = x$	*(Idempotenz)*
(ii)	$x \wedge y = y \wedge x$, $x \vee y = y \vee x$	*(Kommutativität)*
(iii)	$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$, $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$	*(Assoziativität)*
(iv)	$x \wedge (x \vee y) = x \vee (x \wedge y) = x$	*(Absorption)*
(v)	$x \leq y \Longleftrightarrow x = x \wedge y$ *und* $y = x \vee y$	*(Konsistenz)*
(vi)	$y \leq z \Longrightarrow x \wedge y \leq x \wedge z$ *und* $x \vee y \leq x \vee z$	*(Isotonie)*

Bemerkung 2.1.17. *Die teilgeordnete Menge $(\mathfrak{O}(P), \subseteq)$ ist ein Verband. Der Operation $\wedge$ aus Def. 2.1.13 entspricht in $(\mathfrak{O}(P), \subseteq)$ die Mengenoperation $\cap$, $\cup$ stellt die zu $\vee$ entsprechende Operation dar.*

Bemerkung 2.1.18. *Nach [[4],5.4] kann ein Verband $(P, \leq)$ sowohl mit der zugehörigen Ordnung $\leq$ wie auch aufgrund der beiden binären Operationen $\wedge$ und $\vee$ (welche Bem. 2.1.16 erfüllen) als $(P, \wedge, \vee)$ charakterisiert werden. Entscheidend für die Wahl der beiden äquivalenten Darstellungen wird wohl der mathematische Ausgangspunkt der jeweiligen Betrachtungen sein.*

Zum Abschluss dieses einführenden Abschnittes soll einerseits auf die strukturerhaltenden Abbildungen zwischen teilgeordneten Mengen bzw. Verbänden eingegangen werden, andererseits erläutern wir zwei Eigenschaften von Verbänden, die deren Struktur massgeblich beeinflussen:

Definition 2.1.19.
*P, Q seien zwei teilgeordnete Mengen. Eine Abbildung $\varphi : P \longrightarrow Q$ heisst **ordnungserhaltend**, wenn für alle $x, y \in P$ gilt:*

$$x \leq y \Longrightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y).$$

*Gilt sogar die Umkehrung dieser Aussage und ist φ zusätzlich bijektiv, so nennen wir die Abbildung einen **(Ordnungs-)Isomorphismus**.*

Dementsprechend wollen wir strukturerhaltende Abbildungen zwischen Verbänden wie folgt definieren:

Definition 2.1.20.
*$(M, \wedge, \vee)$, $(N, \wedge', \vee')$ seien zwei Verbände. Die Abbildung $\psi : M \longrightarrow N$ wollen wir einen **Verbands-Homomorphismus** nennen, wenn für alle $x, y \in M$ gilt:*

$$\psi(x \vee y) = \psi(x) \vee' \psi(y) \quad \text{und} \quad \psi(x \wedge y) = \psi(x) \wedge' \psi(y).$$

*Ein bijektiver Homomorphismus heisst wie gewohnt **Verbands-Isomorphismus**.*

Bemerkung 2.1.21. *Für zwei Verbände* $(M, \wedge, \vee, 0, 1)$ *und* $(N, \wedge', \vee', 0', 1')$, *welche jeweils ein Null- und Einselement besitzen, können die Homomorphismen verschärft werden, indem zusätzlich* $\psi(0) = 0'$ *und* $\psi(1) = 1'$ *gefordert wird.*
In unseren späteren Gegenüberstellungen von endlichen Posets und endlichen distributiven Verbänden werden diese sogenannten $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$***-Homomorphismen*** *eine tragende Rolle spielen, welche von Homomorphismen ohne diese Zusatzbedingungen nicht eingenommen werden könnte.*

Zwei Eigenschaften von Verbänden treten in der Verbandstheorie immer wieder als einschränkende Voraussetzungen auf, da als deren Folge häufig äusserst nützliche Werkzeuge und Sätze zur Verfügung stehen.

Definition 2.1.22.
Ein Verband $(P, \leq)$ *heisst*

(i) ***distributiv****, falls für alle* $x, y, z \in P$ *gilt:*
$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \text{ und}$$
$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z),$$

(ii) ***modular****, falls für alle* $x, y, z \in P$ *gilt:*
$$x \leq z \Longrightarrow x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z.$$

Abbildung 2 zeigt zwei Beispiele von einfachen nichtdistributiven Verbänden:

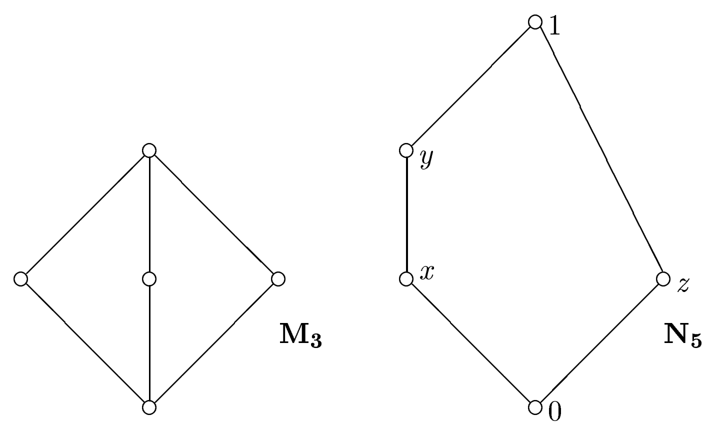


Abbildung 2: Die beiden nichtdistributiven Verbände $\mathbf{M_3}$ und $\mathbf{N_5}$

Bemerkung 2.1.23. *Aus der Distributivität eines Verbandes folgt unmittelbar dessen Modularität. Die Umkehrung dieser Aussage ist aber falsch.*

Beweis. $\Longrightarrow$: Aus $x \leq z$ folgt $z = x \vee z$. Zusammen mit dem zweiten Distributivgesetz gilt also: $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) = (x \vee y) \wedge z$.

$\not\Longleftarrow$: $\mathbf{M_3}$ ist modular, aber nicht distributiv: $x \wedge (y \vee z) = x \wedge 1 = x \neq 0 = 0 \vee 0 = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

□

Bemerkung 2.1.24. *Der Verband* $\mathbf{N_5}$ *ist nicht einmal modular, also erst recht nicht distributiv.*

Beweis. Für die bezeichneten $x, y, z \in \mathbf{N}_5$ mit $x \leq y$ gilt: $x \vee (y \wedge z) = x \vee 0 = x > (x \vee y) \wedge z = y \wedge z = 0$. Widerspruch.

□

Bemerkung 2.1.25. *Nach dem sogenannten* $\mathbf{M_3} - \mathbf{N_5}$*-**Theorem** kann ein Verband, der* $\mathbf{M_3}$ *oder* $\mathbf{N_5}$ *als Unterverband aufweist, nicht distributiv sein.*

Beweis. vgl. [[4], Theorem 6.10]

□

2.2 Erste Aussagen für Posets und Verbände

Im vorangehenden Kapitel haben wir bereits erste einfache Beispiele von teilgeordneten Mengen und Verbänden sowie wichtige und nützliche Begriffe kennengelernt. Im nachfolgenden Abschnitt wollen wir die Struktur von endlichen distributiven Verbänden etwas näher betrachten und erste Aussagen u.a. in der Form eines Struktur-Theorems machen.
Herauskristallisieren wird sich eine sehr befriedigende und für unsere Zwecke äusserst nützliche Isomorphie zwischen absteigenden Teilmengen von endlichen teilgeordneten Mengen (Posets) und endlichen distributiven Verbänden, so dass sich unsere relativ starke Einschränkung auf endliche distributive Verbände als gerechtfertigt erweisen wird.

Definition 2.2.1.
Sei $(P, \leq)$ *ein (endlicher) Verband. Ein Element* $x \in P$ *nennen wir* $\bigvee$***-irreduzibel*** *oder* ***supremum-irreduzibel****, falls gilt:*

(i) $x \neq 0$ *(falls* P *eine 0 besitzt).*
(ii) Aus $x = a \vee b$ *folgt* $x = a$ *oder* $x = b$ $(\forall a, b \in P)$.

Dual werden $\bigwedge$**-irreduzible** oder **infimum-irreduzible** Elemente definiert. Mit $\mathfrak{J}(P)$ bezeichnen wir die Menge aller supremum-irreduziblen Elemente, mit $\mathfrak{M}(P)$ die Menge aller infimum-irreduziblen Elemente eines Verbandes P.

Lemma 2.2.2.
In einem endlichen Verband $(P, \leq)$ *ist ein Element supremum-irreduzibel (infimum-irreduzibel) genau dann, wenn es genau einen unteren (oberen) Nachbarn besitzt.*

Beweis. $\Longrightarrow$: Sei $x \in P$ supremum-irreduzibel. x kann nicht als Supremum endlich vieler echt kleinerer Elemente dargestellt werden, da sonst wegen der Supremum-Irreduzibilität von x aus $0 \neq x = \bigvee\{y \in P \mid y < x\} = y_1 \vee y_2 \vee \ldots \vee y_m$ oBdA $x = y_i < x$ gelten müsste. Also ist $\bigvee\{y \in P \mid y < x\}$ das grösste unter allen Elementen, die kleiner als x sind und somit der einzige untere Nachbar von x.

$\Longleftarrow$: Sei y der einzige untere Nachbar von x, also $y \prec x$. Es gilt also insbesondere $y \leq x$, woraus $0 \neq x = x \vee y$ und damit Def. 2.2.1 (ii) folgt.

Per Dualität kann auch der zweite Teil des Lemmas mühelos bewiesen werden.

□

Mit der Hilfe dieses Lemmas können die supremum- bzw. infimum-irreduziblen Elemente eines endlichen Verbandes problemlos explizit bestimmt werden. In Abbildung 3, welche zwei bereits angetroffene Verbände beinhaltet, sind jeweils die supremum-irreduziblen Elemente als ausgefüllte Kreise dargestellt.

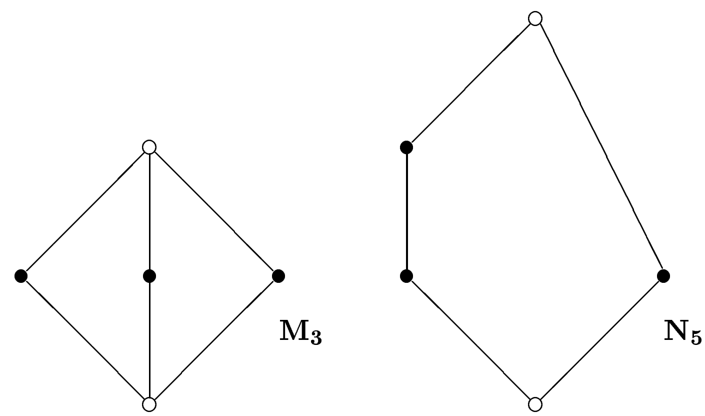


Abbildung 3: $\bigvee$-irreduzible Elemente zweier bekannter nichtdistributiver Verbände

Eine weitere Hilfsaussage zum Verband $(\mathfrak{O}(P), \subseteq)$ soll dessen Struktur noch tiefgreifender ergründen:

Lemma 2.2.3.
Sei $(P, \leq)$ eine endliche teilgeordnete Menge.
Jede Teilmenge $U \in (\mathfrak{O}(P), \subseteq)$ lässt sich als Vereinigung von Mengen $\downarrow x_i$ für $i = 1, ..., k$ mit $x_i \| x_j$ $(i \neq j)$ schreiben.
Ausser im Fall $k = 1$ ist U nicht supremum-irreduzibel.
Es folgt: $\mathfrak{J}(\mathfrak{O}(P)) = \{\downarrow x \mid x \in P\}$.

Beweis. Sei $U \in \mathfrak{O}(P)$ beliebig. Genau dann gilt $U = \downarrow U$. Zudem ist nach Definition $\downarrow U = \{y \in P \mid (\exists x \in U)\ y \leq x\}$.

Definiere $X = \{x \in P \mid x \text{ maximal in } U\} = \{x_1, \ldots, x_k\}$ und weise nach, dass $\mathfrak{O}(P) \ni U = \bigcup_{i=1}^{k} \downarrow x_i$ gilt:

$\Longrightarrow$: Sei $a \in U$ beliebig. $U \in \mathfrak{O}(P) \Longleftrightarrow U = \downarrow U$. Daraus folgt $a \in \downarrow U$ und folglich $\exists\, x \in U$, so dass $a \leq x$ gilt. Aufgrund der Maximalitätseigenschaft der Elemente aus X muss mindestens ein $i \in \{1, ..., k\}$ existieren mit $x_i \in X$ und $a \leq x \leq x_i$, woraus $a \leq x_i$, $a \in \downarrow x_i$ und schliesslich auch $a \in \bigcup_{i=1}^{k} \downarrow x_i$ folgt.

$\Longleftarrow$: Sei $a \in \bigcup_{i=1}^{k} \downarrow x_i$ beliebig. $\exists\, i \in \{1, ..., k\}$, so dass $a \in \downarrow x_i$. Somit folgt $a \leq x_i$. Nach Definition von $\downarrow U$ muss also $a \in U = \downarrow U$ sein.

Zeige nun, dass $x_i \| x_j$ für $x_i, x_j \in X$ und $i \neq j$ gilt: Wenn oBdA $x_i \leq x_j$ für $i \neq j$ gelten würde, so müsste dies $x_i = x_j$ nach sich ziehen (Maximalität von x_i und x_j). Widerspruch.

Im Fall $k = 1$ ist $U = \downarrow x$ $(x \in P)$ supremum-irreduzibel:
Sei $\emptyset \neq \downarrow x = U \cup V$ mit $U, V \in \mathfrak{O}(P)$, so müsste oBdA $x \in U$ und nach Voraussetzung auch $\downarrow x \subseteq U$ gelten. Andererseits impliziert aber $\downarrow x = U \cup V$ auch $U \subseteq \downarrow x$, so dass zusammen $U = \downarrow x$ resultiert, d.h. $\downarrow x$ ist nach Definition 2.2.1 supremum-irreduzibel.

Da die Mengen $U \setminus \{x_i\}$ für $i = 1, 2, ..., k$ allesamt untere Nachbarn von U darstellen, ist $U = \bigcup_{i=1}^{k} \downarrow x_i$ für $k > 1$ supremum-reduzibel.

□

Bemerkung 2.2.4. *Unter Ausnützung der Dualität kann Lemma 2.2.3 umformuliert werden: Jede aufsteigende*[3] *Teilmenge $P \setminus U$ für $U \in \mathfrak{O}(P)$ kann als Vereinigung von Mengen der Form $\uparrow x_i$ mit $x_i \| x_j$ für $i \neq j$ geschrieben werden. Mengen der Form $P \setminus U = \uparrow x$ sind entsprechend dem vorangehenden Lemma supremum-irreduzibel im Verband der aufsteigenden Mengen.*

Korollar 2.2.5.
P sei ein endlicher Poset. $U \in (\mathfrak{O}(P), \subseteq)$ ist infimum-irreduzibel in $\mathfrak{O}(P)$ genau dann, wenn U von der Form $P \setminus \uparrow x$ für ein geeignetes $x \in P$ ist.

Beweis. $\Longrightarrow$: Sei U ein beliebiges Element von $\mathfrak{O}(P)$. U ist nach Lemma 2.1.11 absteigend genau dann, wenn $P \setminus U$ eine aufsteigende Menge ist. Ist also U infimum-irreduzibel in $\mathfrak{O}(P)$, so folgt aufgrund des Dualitätsprinzipes, dass $P \setminus U$ in der Klasse der aufsteigenden Mengen supremum-

[3] Aufsteigende Mengen werden dual zu absteigenden Mengen, d.h. mit der inversen Ordnungsrelation, definiert und aufgrund der Mengeninklusion geordnet.

irreduzibel ist, also genau einen unteren Nachbarn besitzt. Nach der vorangehenden Bemerkung hat $P \setminus U$ damit die Form $\uparrow x$, so dass $U = P \setminus \uparrow x$ resultiert.

$\Longleftarrow$: Sei $U = P \setminus \uparrow x$. $P \setminus U = \uparrow x$ ist nach der vorherigen Bemerkung 2.2.4 supremum-irreduzibel im Verband der aufsteigenden Mengen, d.h. U ist infimum-irreduzibel in $\mathfrak{O}(P)$.

□

Wir wollen nun zeigen, dass ein endlicher distributiver Verband L durch die teilgeordnete Menge $P = \mathfrak{J}(L)$ allein charakterisiert ist und dass eine isomorphe Kopie des ursprünglichen Verbandes mit Hilfe der absteigenden Mengen $\mathfrak{O}(P) = \mathfrak{O}(\mathfrak{J}(L))$ zurückgewonnen werden kann. Die daraus resultierende Repräsentation von endlichen distributiven Verbänden als endliche Posets, die im folgenden Theorem eingeführte sogenannte **Birkhoff-Dualität**, stellt ein mächtiges und wertvolles Werkzeug zum Studium von endlichen distributiven Verbänden dar.

Theorem 1.
Sei $\mathbf{D}_F$ die Klasse aller endlichen distributiven Verbände und $\mathbf{P}_F$ die Klasse aller endlichen teilgeordneten Mengen. Es gilt:

$$L \cong \mathfrak{O}(\mathfrak{J}(L)) \text{ und } P \cong \mathfrak{J}(\mathfrak{O}(P)) \qquad (\forall L \in \mathbf{D}_F,\ P \in \mathbf{P}_F)$$

Dabei fungieren die Abbildungen $\eta : L \longrightarrow \mathfrak{O}(\mathfrak{J}(L))$, definiert durch $\eta(a) = \{x \in \mathfrak{J}(L) \mid x \leq a\}$, sowie $\varepsilon : P \longrightarrow \mathfrak{J}(\mathfrak{O}(P))$, definiert durch $\varepsilon(x) = \downarrow x$, als Isomorphismen zwischen L und $\mathfrak{O}(\mathfrak{J}(L))$ bzw. P und $\mathfrak{J}(\mathfrak{O}(P))$.
Wir nennen $\mathfrak{J}(L)$ den ***dualen Poset*** *zu L, $\mathfrak{O}(P)$ den* ***dualen Verband*** *zum Poset P.*

Beweis. vgl. [[4], Theoreme 8.17, 8.19]

□

Aufgrund dieses Theorems können Probleme in endlichen distributiven Verbänden übersetzt werden in Probleme in endlichen teilgeordneten Mengen, welche tendenziell übersichtlicher und einfacher aufgebaut sind als die dazugehörenden Verbände. Es besteht also eine 1:1-Entsprechung zwischen dem Verband $L = \mathfrak{O}(P)$ und dem Poset $P = \mathfrak{J}(L)$.
Dies werden wir ausnutzen, indem wir unsere Fragestellungen zu endlichen distributiven Verbänden zuerst in teilgeordneten Mengen $P = \mathfrak{J}(L)$ untersuchen und dann mit dem Ordnungs-Isomorphismus $P \ni x \longmapsto \downarrow x \in \mathfrak{O}(P)$ in einen zum ursprünglichen Verband L isomorphen Verband $\mathfrak{O}(\mathfrak{J}(L))$ übersetzen.
Auf diese Weise werden wir im dritten Kapitel Kriterien für Posets aufstellen, die es erlauben, Komplemente maximaler Unterverbände in endlichen

distributiven Verbänden aufgrund von Bedingungen an deren dualen Posets zu bestimmen und zu klassifizieren.

Neben dieser objektbezogenen Sichtweise der Birkhoff-Dualität, wie sie sich in Theorem 1 präsentiert, soll im folgenden Satz auch ein kurzer Blick auf denjenigen Teil der Birkhoff-Dualität geworfen werden, welcher sich mit strukturerhaltenden Abbildungen beschäftigt:

Satz 2.2.6.
P und Q seien endliche Posets, $L = \mathfrak{O}(P)$, $K = \mathfrak{O}(Q)$.
Zu jedem $\{0,1\}-$Homomorphismus $f : L \longrightarrow K$ existiert eine ihm zugeordnete (vgl. Abbildung 4) ordnungserhaltende Abbildung $\varphi_f : Q \longrightarrow P$, definiert durch

$$\varphi_f(y) = min\{x \in P \mid y \in f(\downarrow x)\} \quad \textit{für alle } y \in Q.$$

Umgekehrt existiert zu jeder ordnungserhaltenden Abbildung $\varphi : Q \longrightarrow P$ ein assoziierter $\{0,1\}$-Homomorphismus $f_\varphi : L \longrightarrow K$, definiert durch

$$f_\varphi(a) = \varphi^{-1}(a) \quad \textit{für alle } a \in L.$$

Die Abbildungen $f \mapsto \varphi_f$ und $\varphi \mapsto f_\varphi$ wirken damit als 1:1-Entsprechung zwischen $\{0,1\}$-Homomorphismen von L nach K und ordnungserhaltenden Abbildungen von Q nach P.

Beweis. vgl. [[4], Theorem 8.24]

□

Das Schema in Abbildung 4 soll das Zusammenspiel von $\{0,1\}-$Homomorphismen und ordnungserhaltenden Abbildungen etwas andeuten:

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[r, "\varphi", "\varphi_f"'] \arrow[d, shift left] & P \arrow[d, shift right] \\
K = \mathfrak{O}(Q) \arrow[u, shift left] & L = \mathfrak{O}(P) \arrow[l, "f_\varphi"', "f"] \arrow[u, shift right]
\end{tikzcd}$$

Abbildung 4: Strukturerhaltende Abbildungen in der Birkhoff-Dualität

Bemerkung 2.2.7. *In Kombination mit Theorem 1 bezeichnen wir diese 1:1-Entsprechung von endlichen Posets zusammen mit ordnungserhaltenden Abbildungen und endlichen distributiven Verbänden zusammen mit* $\{0,1\}$*-Homomorphismen als sogenannte* ***kategorische Äquivalenz****.*

Beispiel 2.2.8. *Die Voraussetzung der Distributivität eines Verbandes in Theorem 1 ist notwendig, wie dies Abbildung 5 mit dem bekannten nichtdistributiven Beispiel* $\mathbf{M}_3$*, bei dem offensichtlich* $\mathbf{M}_3 \ncong \mathfrak{O}(\mathfrak{J}(\mathbf{M}_3))$ *gilt, zeigt.*

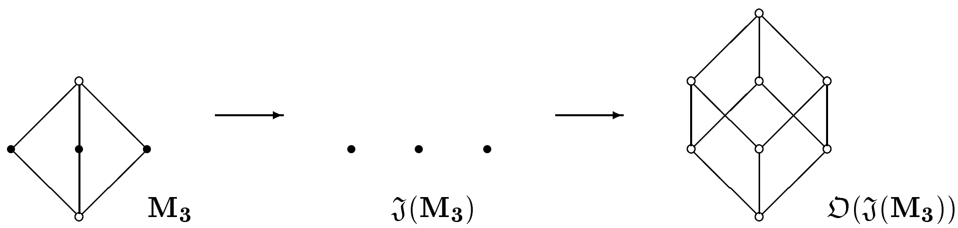


Abbildung 5: Distributivität als notwendige Voraussetzung zur Anwendung der Birkhoff-Dualität

Beispiel 2.2.9. *Die Wirkungsweise von Theorem 1, insbesondere die "Übersetzung" eines Verbandes in seinen dualen Poset und die anschliessende "Rückführung" in den ursprünglichen Verband, zeigt sich am besten anhand eines überschaubaren endlichen distributiven Verbandes, wie dies in Abbildung 6 der Fall ist.*

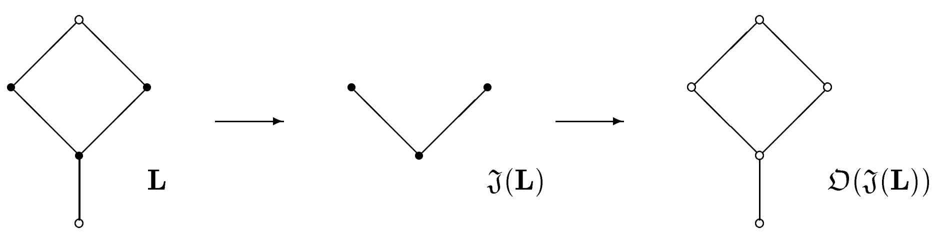


Abbildung 6: Die Birkhoff-Dualität anhand eines einfachen endlichen distributiven Verbandes

3 Maximale Unterverbände endlicher distributiver Verbände

3.1 Eine Charakterisierung von maximalen Unterverbänden

Nach einer simplen und einfach handzuhabenden Charakterisierung von maximalen Unterverbänden M endlicher distributiver Verbände L[4] widmet sich das folgende Kapitel der Frage, welche Eigenschaften maximale Unterverbände bzw. deren Komplemente $K = L \setminus M$ innerhalb des Verbandes aufweisen. Verblüffenderweise stellt sich heraus, dass diese Komplemente stets in mindestens dreifacher Ausführung als direktes Produkt im Verband L auftreten.

Maximale Unterverbände endlicher distributiver Verbände werden nach Rival [7] wie folgt charakterisiert:

Satz 3.1.1.
Sei L ein endlicher distributiver Verband, M ein echter maximaler Unterverband von L. Dann existieren $a \in \mathfrak{J}(L)$, $b \in \mathfrak{M}(L)$, $a \leq b$, so dass gilt:

(i) $K = L \setminus M = [a, b]$,
(ii) $(a, b] \subseteq L \setminus \mathfrak{J}(L)$,
(iii) $[a, b) \subseteq L \setminus \mathfrak{M}(L)$.

Beweis. vgl. [[7], Theorem 3]

□

Beispiel 3.1.2. *In Abbildung 7 wird die Anwendung von Satz 3.1.1 illustriert, indem das Komplement K eines maximalen Unterverbandes M fett angedeutet ist. Zusätzlich sind supremum-irreduzible Elemente als ausgefüllte Kreise, infimum-irreduzible Elemente umkreist dargestellt.*

Wir sind also in der Lage, maximale Unterverbände lediglich aufgrund der "Gestalt" ihrer Komplemente zu bestimmen. Fortan wollen wir drei Formen unterscheiden, welche diese Komplemente annehmen können:

1. Fall: $a = b$, a ist $\bigvee$- und $\bigwedge$-irreduzibel.
2. Fall: $a \prec b$, $a \notin \mathfrak{M}(L)$, $b \notin \mathfrak{J}(L)$, $(a \in \mathfrak{J}(L),\ b \in \mathfrak{M}(L))$.
3. Fall: $a < b$, $a \not\prec b$, $x \notin \mathfrak{J}(L)$, $x \notin \mathfrak{M}(L)$, für alle $a < x < b$, $(a \in \mathfrak{J}(L),\ a \notin \mathfrak{M}(L),\ b \in \mathfrak{M}(L),\ b \notin \mathfrak{J}(L))$.

[4] Von nun an werden wir uns in unseren Betrachtungen auf endliche distributive Verbände beschränken. Um eine gute Lesbarkeit zu gewährleisten, ist aber diese Bedingung meist vorausgesetzt, ohne sie immer wieder explizit zu nennen. Somit werden sich beispielsweise maximale Unterverbände stets auf endliche distributive Verbände beziehen.

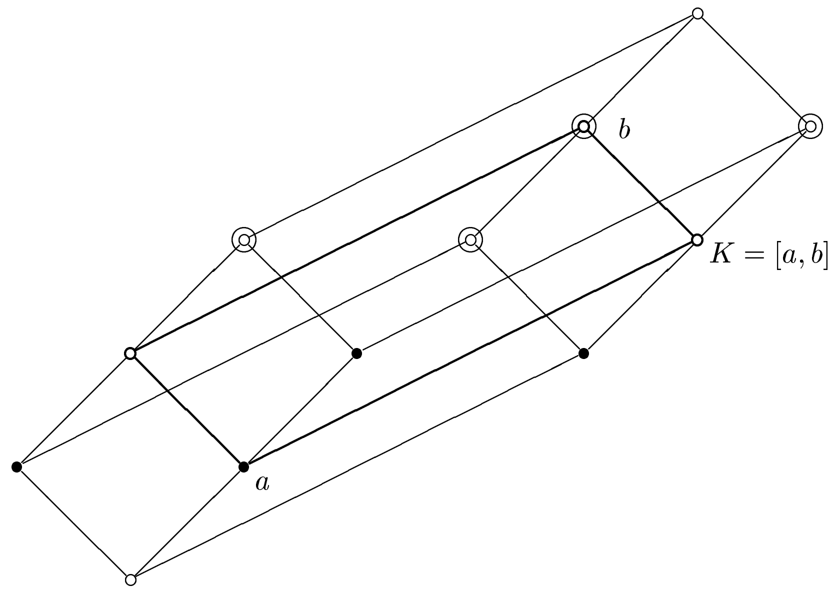


Abbildung 7: Maximaler Unterverband eines endlichen distributiven Verbandes

Als Liniendiagramme können die drei zu unterscheidenden Fälle wie in Abbildung 8 dargestellt bzw. angedeutet werden.

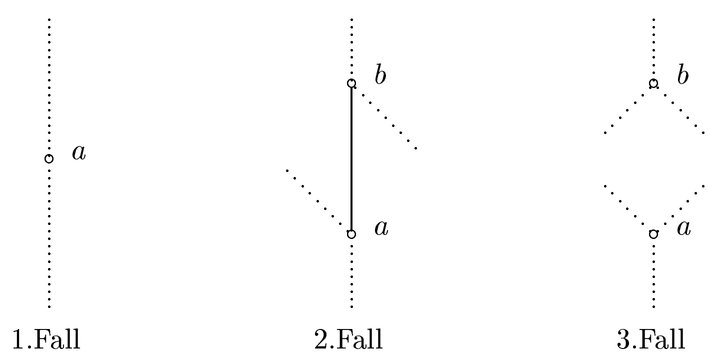


Abbildung 8: Komplemente von maximalen Unterverbänden endlicher distributiver Verbände mit einer möglichen Klassifikation ihrer Formen

3.2 Posets und maximale Unterverbände

Im zweiten Kapitel haben wir gesehen, dass mathematische Fragestellungen zu endlichen distributiven Verbänden problemlos in tendenziell kleinere Strukturen, nämlich endliche Posets, übersetzt werden können. Aufgrund

der besseren Übersichtlichkeit dieser Posets kommen dort mitunter mathematische Gesetzmässigkeiten deutlicher zum Ausdruck als in den zugehörigen Verbänden.
Eine mögliche Problemstellung, die sich als direkte Konsequenz aus der Dualität in Theorem 1 und der Charakterisierung von maximalen Unterverbänden in Satz 3.1.1 ergibt, besteht in der Frage, unter welchen Bedingungen an ein Poset die in Abbildung 8 dargestellten Formen von Komplementen im zugehörigen dualen Verband denn auch wirklich auftreten.
Diese Kriterien sollen unter Berücksichtigung der drei Formen von Komplementen präsentiert werden:

3.2.1 Der triviale Fall

Das Komplement eines maximalen Unterverbandes besteht im trivialen Fall lediglich aus einem Element, welches sowohl supremum- wie auch infimum-irreduzibel ist. Da jedes Element eines Verbandes aufgrund der Birkhoff-Dualität einer absteigenden Menge eines Posets entspricht, liegt es nahe, das Kriterium wie folgt festzulegen:

Lemma 3.2.1.
Sei P ein (endlicher) Poset. Der duale (distributive) Verband $\mathfrak{O}(P)$ enthält genau dann ein Komplement von trivialer Gestalt, wenn $x, y \in P$ existieren, so dass $P \setminus \downarrow x = \uparrow y$ gilt.

Beweis. $\Longrightarrow$: Sei $U \in \mathfrak{O}(P)$ ein Komplement eines maximalen Unterverbandes von trivialer Gestalt, d.h. U ist $\bigvee$- und $\bigwedge$-irreduzibel. Nach Lemma 2.2.3 ist $U = \downarrow x$ für ein $x \in P$ und nach Korollar 2.2.5 gilt zudem $U = P \setminus \uparrow y$ für ein $y \in P$. Es folgt deshalb $\downarrow x = P \setminus \uparrow y$ und somit $P \setminus \downarrow x = \uparrow y$ für geeignete $x, y \in P$.

$\Longleftarrow$: Seien $x, y \in P$ mit $P \setminus \downarrow x = \uparrow y$ gegeben. Aus Lemma 2.2.3 folgt einerseits, dass $\downarrow x$ supremum-irreduzibel ist. Andererseits muss $\downarrow x$ aufgrund von Korollar 2.2.5 auch infimum-irreduzibel sein, da $P \setminus \downarrow x = \uparrow y$ und somit $\mathfrak{O}(P) \ni \downarrow x = P \setminus \uparrow y$ gilt. $\downarrow x$ ist also ein Komplement eines maximalen Unterverbandes von trivialer Gestalt im dualen Verband $\mathfrak{O}(P)$.

□

Beispiel 3.2.2. *Anhand von Abbildung 9 soll das Kriterium aus Lemma 3.2.1 veranschaulicht werden.*

3.2.2 Der zweite Fall

Als Erweiterung des trivialen Falles von Komplementen maximaler Unterverbände und als Vorbereitung auf den allgemeineren (dritten) Fall soll nachfolgend ein Kriterium angegeben werden, anhand dessen beliebige Posets auf ein Vorkommen von Komplementen zweiter Art in deren dualen

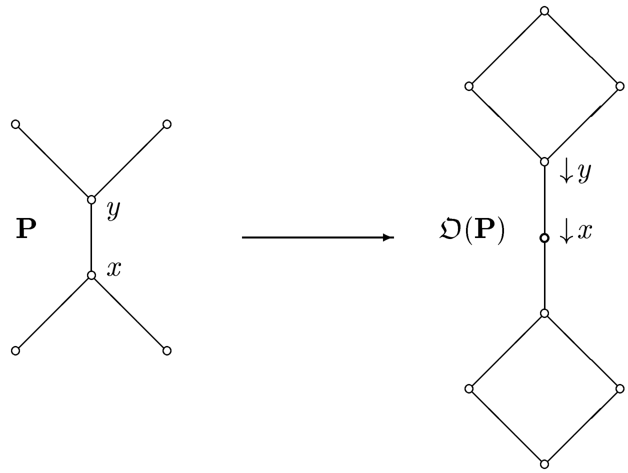


Abbildung 9: Ein Komplement eines maximalen Unterverbandes erster Art

Verbänden untersucht werden können. Dabei spielen wiederum die vorbereitenden Sätze im zweiten Kapitel dieser Arbeit (Lemma 2.2.3, Korollar 2.2.5) eine Schlüsselrolle, sind sie es doch, die das Kriterium im Vergleich zum vorangehenden verlängern und schwerfälliger erscheinen lassen.

Lemma 3.2.3.
Sei P ein Poset, $\mathfrak{O}(P)$ der zugehörige duale Verband. $\mathfrak{O}(P)$ enthält genau dann ein Komplement eines maximalen Unterverbandes von der Gestalt des zweiten Falles, wenn $x_1, x_2, y \in P$ existieren, so dass $x_2 \| y$, $x_1 \| x_2$, x_2 minimal in $P \setminus {\downarrow} x_1$ und $P \setminus ({\downarrow} x_1 \cup {\downarrow} x_2) = {\uparrow} y$ gilt.

Beweis. $\Longrightarrow$: Seien $U, V \in L = \mathfrak{O}(P)$, $U \prec V$, $U \in \mathfrak{J}(L)$, $U \notin \mathfrak{M}(L)$, $V \notin \mathfrak{J}(L)$, $V \in \mathfrak{M}(L)$ gegeben.

1. Nach Lemma 2.2.3 muss $U = {\downarrow} x_1$ für ein $x_1 \in P$ gelten. Weil $U \prec V$ ist, resultiert aus Lemma 2.1.12 $V = {\downarrow} x_1 \cup \{x_2\}$ für x_2 minimal in $P \setminus {\downarrow} x_1$. Zudem ist die Gleichung $V = {\downarrow} x_1 \cup \{x_2\} = {\downarrow} x_1 \cup {\downarrow} x_2$ erfüllt. Sonst wäre ${\downarrow} x_1 \cup \{x_2\} \subset {\downarrow} x_1 \cup {\downarrow} x_2$, womit ein $y \in P \setminus {\downarrow} x_1$ mit $y < x_2$ existieren müsste, was ein Widerspruch zur Minimalität von x_2 darstellt.

2. $V = {\downarrow} x_1 \cup {\downarrow} x_2$ ist nach Voraussetzung und Lemma 2.2.3 supremumreduzibel. Also ist $x_1 \| x_2$, da sonst oBdA $x_1 \leq x_2$ und $V = {\downarrow} x_2$ gelten würde.

3. Ist $V = {\downarrow} x_1 \cup \{x_2\} \in \mathfrak{M}(L)$, so gilt auch $P \setminus ({\downarrow} x_1 \cup \{x_2\}) =$
$P \setminus ({\downarrow} x_1 \cup {\downarrow} x_2) = {\uparrow} y$, für ein $y \in P$ und $P \setminus {\downarrow} x_1 = {\uparrow} y \cup \{x_2\}$.

Zeige nun, dass $x_2 \| y$ gilt:

(a) Wäre $y \leq x_2$ so folgt $\{x_2\} \in {\uparrow} y$ und $P \setminus {\downarrow} x_1 = {\uparrow} y \cup \{x_2\} = {\uparrow} y$. Widerspruch zu $U \notin \mathfrak{M}(L)$.

(b) Wäre demgegenüber $y \geq x_2$, so erhielten wir $\uparrow y \subseteq \uparrow x_2$ und $P \setminus \downarrow x_1 = \uparrow y \cup \{x_2\} \subseteq \uparrow x_2 \cup \{x_2\} = \uparrow x_2$, also $P \setminus \downarrow x_1 \subseteq \uparrow x_2$. Andererseits gilt aber wegen $x_1 \| x_2$ auch $\uparrow x_2 \subseteq P \setminus \downarrow x_1$, so dass $P \setminus \downarrow x_1 = \uparrow x_2$ resultiert. Widerspruch zu $U \notin \mathfrak{M}(L)$.

$\Longleftarrow$: $\downarrow x_1$ ist nach Lemma 2.2.3 supremum-irreduzibel.
$\downarrow x_1 \cup \downarrow x_2$ ist nach Voraussetzung und Korollar 2.2.5 infimum-irreduzibel.
Wegen $x_1 \| x_2$ und Lemma 2.2.3 ist $\downarrow x_1 \cup \downarrow x_2$ supremum-reduzibel.
Zeige, dass $\downarrow x_1$ neben $\downarrow x_1 \cup \{x_2\}$ noch $\downarrow x_1 \cup \{y\}$ als oberen Nachbarn besitzt, dass also y minimal in $P \setminus \downarrow x_1$ ist:

Wäre y nicht minimal in $P \setminus \downarrow x_1$, würde ein $a \in P \setminus \downarrow x_1, a < y$, existieren. Daraus folgt, dass $\uparrow a \supset \uparrow y$ und somit $P \setminus (\downarrow x_1 \cup \downarrow x_2) = \uparrow y \subset \uparrow a$ ist. Insbesondere gilt also $a \in \uparrow a$, $a \notin \uparrow y = P \setminus (\downarrow x_1 \cup \downarrow x_2)$. $a \in \downarrow x_1$ ist unmöglich, da gleichzeitig $a \in P \setminus \downarrow x_1$ gelten müsste. Ist $a \in \downarrow x_2$, so folgt $a \leq x_2$ und zusammen mit der Minimalität von x_2 und der Voraussetzung bekommen wir $x_2 = a < y$. Widerspruch zu $x_2 \| y$.
Das zweielementige Intervall $[\downarrow x_1, \downarrow x_1 \cup \downarrow x_2]$ stellt also ein Komplement eines maximalen Unterverbandes der zweiten Art dar.

□

Beispiel 3.2.4. *Im dualen Verband zum Poset* $\bar{\mathbf{3}}$ *(vgl. Abbildung 10) treten die beschriebenen Komplemente zweiter Art mehrfach auf, eines davon ist fett markiert. Die Anwendung des Kriteriums zu deren Bestimmung in beliebigen teilgeordneten Mengen soll anhand dieses Beispiels illustriert werden.*

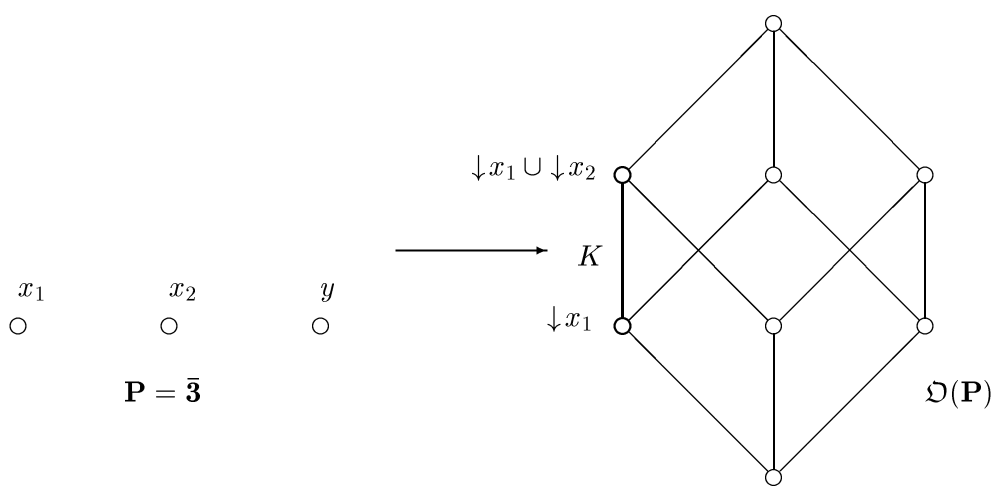


Abbildung 10: Ein Komplement eines maximalen Unterverbandes der zweiten Art

3.2.3 Der dritte Fall

Aufgrund ihres Aussehens können zahlreiche Komplemente maximaler Unterverbände von der dritten Art als "Fischbäuche" bezeichnet werden. Ihr Vorkommen ist ungleich schwieriger zu charakterisieren, als dies in den vorangehenden beiden Möglichkeiten der Fall war. Einerseits ist die Länge der Komplemente (= Intervalle) unbestimmt, andererseits sind die Nachbarschaftsbeziehungen der Intervallpunkte mit Ausnahme des Randes insofern unklar, als dass lediglich die Mindestanzahl ihrer oberen bzw. unteren Nachbarn, nämlich jeweils zwei, bekannt ist. Nichtsdestotrotz wagen wir uns an ein Kriterium für Posets, welches Komplemente dritter Art im zugeordneten dualen Verband erfassen soll.

Lemma 3.2.5.
Sei P ein Poset, $\mathfrak{O}(P)$ der zugehörige duale Verband. $\mathfrak{O}(P)$ besitzt genau dann ein Komplement eines maximalen Unterverbandes dritter Art, wenn $y, x_1, ..., x_n \in P$ $(n \geq 2)$ existieren, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) $|P \setminus (\uparrow y \cup \downarrow x_1)| \geq 2$,
(ii) $x_1, \ldots, x_n \in P$ *sind genau die maximalen Elemente in* $P \setminus \uparrow y$,
(iii) $\downarrow y \cap (\bigcup_{i=1}^{n} \downarrow x_i \setminus \downarrow x_1) = \emptyset$.

In diesem Fall ist $K = [\downarrow x_1, \bigcup_{i=1}^{n} \downarrow x_i]$ *das Komplement eines maximalen Unterverbandes der dritten Art.*

Beweis. $\Longrightarrow$: Sei $[a, b] \subseteq \mathfrak{O}(P)$ ein beliebiges Komplement eines maximalen Unterverbandes dritter Art (vgl. die Charakterisierung in 3.1). Es gilt nach Voraussetzung:
1. $a \in \mathfrak{J}(\mathfrak{O}(P)) = \mathfrak{J}(L) \Longleftrightarrow a = \downarrow x$ für ein $x \in P$.
2. $b \notin \mathfrak{J}(L) \Longleftrightarrow b = \bigcup_{i=1}^{m} \downarrow a_i$ mit $a_i \| a_j$ für $i \neq j$ und $m \geq 2$.
3. $b \in \mathfrak{M}(L) \Longleftrightarrow P \setminus b = \uparrow y$ für ein $y \in P \Longrightarrow [a, b] = [\downarrow x, \bigcup_{i=1}^{m} \downarrow a_i]$

Aussage (ii): Zeige, dass die a_i's $(i = 1, ..., m)$ genau die maximalen Elemente in $P \setminus \uparrow y$ darstellen:
Wäre a_{m+1} ein weiteres, von den a_i's verschiedenes maximales Element in $P \setminus \uparrow y$, so würde insbesondere $a_{m+1} \in P \setminus \uparrow y = \bigcup_{i=1}^{m} \downarrow a_i$ gelten. Damit müsste ein $i \in \{1, ..., m\}$ existieren mit $a_{m+1} \in \downarrow a_i$, was $a_{m+1} \leq a_i$ nach sich ziehen würde. Aufgrund der Maximalität von a_i wäre also $a_{m+1} = a_i$. Widerspruch. Es existieren also neben den a_i's keine weiteren maximalen Elemente in $P \setminus \uparrow y$.

Weise nach, dass die a_i's maximal sind für alle $i \in \{1, ..., m\}$: Wäre dies nicht der Fall, so sei oBdA a_1 nicht maximal in $P \setminus \uparrow y$. $\exists\, b \in P \setminus \uparrow y$ mit

$b > a_1$. Da $b \in P \setminus \uparrow y = \bigcup\limits_{i=1}^{m} \downarrow a_i$, existiert ein $i \in \{2,...,m\}$ mit $b \in \downarrow a_i$, also $a_1 < b \leq a_i$. Somit gilt $a_1 \leq a_i$, was ein Widerspruch zu $a_1 \| a_i$ $(i \neq 1)$ darstellt. Wegen $m \geq 2$ besitzt $P \setminus \uparrow y$ also mindestens zwei maximale Elemente $a_1, a_2, ..., a_m$. Mit $x_i \doteq a_i$ und $m \doteq n$ ist deshalb Aussage (ii) bewiesen.

Nach einer geeigneten Umnummerierung gilt sogar $x = a_1 = x_1$: Wegen $[a,b] = [\downarrow x, \bigcup\limits_{i=1}^{n} \downarrow a_i]$ ist $\downarrow x \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} \downarrow a_i$ und insbesondere $x \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} \downarrow a_i$. Wäre $x \neq a_i$ für alle $i \in \{1,...,n\}$, so könnte x nicht maximal sein in $P \setminus \uparrow y$, also $x < a_i$ für mindestens ein i. Es folgt aber $\downarrow x \subset \downarrow a_i \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} \downarrow a_i = b$, womit $]a,b[$ mit $\downarrow a_i$ ein supremum-irreduzibles Element besitzen würde, was aber nach Voraussetzung nicht möglich ist.

Wir erhalten also oBdA $[a,b] = [\downarrow a_1, \bigcup\limits_{i=1}^{n} \downarrow a_i] = [\downarrow x_1, \bigcup\limits_{i=1}^{n} \downarrow x_i]$.

Aussage (i): Da ein Komplement dritter Art als Intervall ausser den beiden Randpunkten noch mindestens ein weiteres Element aufweist, folgt Aussage (i) unmittelbar.

Aussage (iii): Gegenannahme: Wäre $\downarrow y \cap (\bigcup\limits_{i=1}^{n} \downarrow x_i \setminus \downarrow x_1) \neq \emptyset$, so $\exists\, a \in P$ mit $a \in \downarrow y$, $a \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} \downarrow x_i$, also $a \leq y$, $a \leq x_j$ für mindestens ein $j \neq 1$, da $a \notin \downarrow x_1$. Es gilt sogar $a < y$, da mit $a = y$ auch $y \leq x_j$ und $x_j \in \uparrow y$ folgen würde, was ein Widerspruch zur Vorausetzung wäre. Somit ist also $a \notin \uparrow y$.

Definiere sodann die folgenden Mengen:
$C_0 \doteq \downarrow x_1$
$C_{1,i_1} = \downarrow x_1 \cup \{c_{1,i_1}\}$, c_{1,i_1} minimal in $P \setminus \downarrow x_1$ $(i_1 = 1,...,n_1)$, $c_{1,i_1} \notin \uparrow a$
$C_{2,i_2} = C_{1,i_1} \cup \{c_{2,i_2}\}$, c_{2,i_2} $(i_2 = 1,...,n_2)$ minimal in $P \setminus C_{1,i_1}$ für ein i_1, $c_{2,i_2} \notin \uparrow a$ (n_2 bezeichne die Anzahl der minimalen Elemente in $P \setminus C_{1,i_1}$ für $i_1 = 1,...,n_1$)
$C_{k,i_k} = C_{k-1,i_{k-1}} \cup \{c_{k,i_k}\}$, c_{k,i_k} $(i_k = 1,...,n_k)$ minimal in $P \setminus C_{k-1,i_{k-1}}$ für ein i_k, $c_{k,i_k} \notin \uparrow a$ (n_k bezeichne die Anzahl der minimalen Elemente in $P \setminus C_{k-1,i_{k-1}}$ für $i_{k-1} = 1,...,n_{k-1}$)

Betrachte nun $C \doteq \bigcup \max\limits_{i,j}\{C_{i,j}\}$ und zeige, dass $\downarrow x_1 \subset C \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} \downarrow x_i$ gilt:
(a) $\downarrow x_1 \subset C$ ist offensichtlich erfüllt, da nach (i) sicher mindestens ein $c \in P \setminus \downarrow x_1$, c minimal, $c \notin \uparrow a$ existiert, da sonst $P \setminus \downarrow x_1 = \uparrow a$ gelten würde.
(b) $C \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} \downarrow x_i = P \setminus \uparrow y$: Aus $x \in C$ folgt $x \notin \uparrow a$ und damit unmittelbar $x \notin \uparrow y$, also $x \in P \setminus \uparrow y$. Zudem ist $a \in P \setminus \uparrow y$, aber $a \notin C$. Damit ist die

Menge C Teilmenge von $]\downarrow x_1, \bigcup_{i=1}^{n} \downarrow a_i[$, was zusammen mit der, aufgrund des Konstruktionsverfahrens von C begründeten, Behauptung $P \setminus C = \uparrow a$ zur widersprüchlichen Aussage, dass C infimum-irreduzibel ist, führt.

$\Longleftarrow$: Die Aussagen (i), (ii) und (iii) seien erfüllt.

Zeige, dass $[\downarrow x_1, \bigcup_{i=1}^{n} \downarrow x_i]$ ein Komplement dritter Art ist.

1. $\downarrow x_1$ ist nach Lemma 2.2.3 supremum-irreduzibel.
2. $\downarrow x_1$ besitzt mindestens zwei obere Nachbarn:

(a) Einerseits ist $\downarrow x_1 \cup \{y\}$ oberer Nachbar, da y minimal in $P \setminus \downarrow x_1$ ist. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so würde ein $a \in P \setminus \downarrow x_1$ mit $a < y$ existieren. Also $a \notin \downarrow x_1$, $a \in \downarrow y$, $a \in P \setminus \uparrow y$. Nach Voraussetzung existiert also ein $i \neq 1$ mit $a \in \downarrow x_i$, $a \notin \downarrow x_1$. Also $a \in \downarrow y$, $a \in \bigcup_{i=1}^{n} \downarrow x_i \setminus \downarrow x_1$, was $\downarrow y \cap (\bigcup_{i=1}^{n} \downarrow x_i \setminus \downarrow x_1) \neq \emptyset$ nach sich zieht. Widerspruch.

(b) Andererseits ist $\downarrow x_1 \cup \{c\}$, mit c minimal in $P \setminus \downarrow x_1$, ein weiterer oberer Nachbar von $\downarrow x_1$ (c existiert, da nach Voraussetzung mindestens zwei maximale Elemente x_1, x_2 in $P \setminus \uparrow y$ vorhanden sind, also $x_2 \notin \downarrow x_1$, wähle also $c \in \downarrow x_2$, $c \notin \downarrow x_1$, c minimal).

3. $\bigcup_{i=1}^{n} \downarrow x_i$ ist nach Lemma 2.2.3 für $n \geq 2$ supremum-reduzibel.
4. $\bigcup_{i=1}^{n} \downarrow x_i = P \setminus \uparrow y$ ist infimum-irreduzibel (vgl. Korollar 2.2.5).

Sei nun $U \in \mathfrak{O}(P)$, $\downarrow x_1 \subset U \subset \bigcup_{i=1}^{n} \downarrow x_i$ beliebig.

Zeige, dass $U = \downarrow x_1 \cup \downarrow y_2 \cup \ldots \cup \downarrow y_m$ für $x_1 \| y_i$ $(i = 2, ..., m)$ und $y_i \| y_j$ $(i \neq j)$ gilt.

Wäre $U = \downarrow a$ für ein $a \in P$, so müsste nach Voraussetzung $\downarrow x_1 \subset U = \downarrow a$ gelten, was insbesondere $\downarrow x_1 \subseteq \downarrow a$ und somit $x_1 \leq a$ nach sich zieht. Zusammen mit $a \in P \setminus \uparrow y$ und der Maximalität von x_1 folgt $a = x_1$. Widerspruch zu $\downarrow x_1 \subset \downarrow a$.

Also ist nach Lemma 2.2.3 $\downarrow x_1 \subset U = \downarrow a \cup \downarrow y_2 \cup \ldots \cup \downarrow y_m$ ($y_i \in \bigcup_{i=1}^{n} \downarrow x_i$, $a \| y_i$, $y_i \| y_j$ für $i \neq j$). Aus $x_1 \in \downarrow x_1$ folgt $x_1 \in \downarrow a \cup \downarrow y_2 \cup \ldots \cup \downarrow y_m$ und oBdA $x_1 \in \downarrow a$. Damit gilt $x_1 \leq a$ und aufgrund der Maximalität von x_1 folgt $a = x_1$, so dass also U oBdA von der Form $\downarrow x_1 \cup \downarrow y_2 \cup \ldots \cup \downarrow y_m$ ist.

5. U besitzt mindestens zwei obere Nachbarn (aufgrund der Form ist U offensichtlich bereits supremum-reduzibel):

(a) Da $U \subset \bigcup_{i=1}^{n} \downarrow x_i$ gilt, existiert mindestens ein Element $a \notin U$, $a \in$

$\bigcup_{i=1}^{n} \downarrow x_i$, a minimal in $P \setminus U$, also ist $U \cup \{a\}$ ein oberer Nachbar von U.

(b) y ist minimal in $P \setminus U$: Wäre dies nicht der Fall, so würde ein $b \in P \setminus U$ existieren mit $b < y$. Daraus folgt $b \in P \setminus \uparrow y$ und somit $b \in x_i$ für ein $i \in \{2, ..., n\}$ ($b \notin \downarrow x_1$). Also $\downarrow y \cap (\bigcup_{i=1}^{n} \downarrow x_i \setminus \downarrow x_1) \neq \emptyset$. Widerspruch.
$U \cup \{y\}$ ist somit ein weiterer oberer Nachbar von U.

□

Beispiel 3.2.6. *Einer der einfachsten Fälle eines Komplementes dritter Art, eines "Fischbauches", ist im dualen Verband des Posets aus Abbildung 11 sichtbar:*

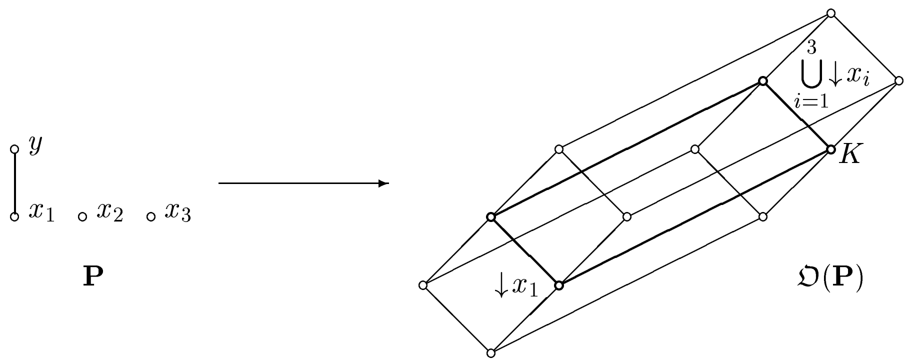


Abbildung 11: Ein Komplement eines maximalen Unterverbandes dritter Art

Bemerkung 3.2.7. *Nach einem Theorem von Rival ([7], Theorem 2) ist der in Abbildung 11 dargestellte duale Verband sogar der kleinste, welcher ein Komplement eines maximalen Unterverbandes der markierten (dritten) Art enthält.*

3.2.4 Der allgemeine Fall

Ein etwas vereinfachtes und auf beliebige Komplemente maximaler Unterverbände anwendbares Kriterium könnte als Zusammenfassung der vorangehenden drei unterschiedenen Fälle etwa wie folgt aussehen:

Lemma 3.2.8.
L sei ein endlicher distributiver Verband, $P = \mathfrak{J}(L)$ sein dualer Poset. Die Komplemente maximaler Unterverbände in L stehen in bijektiver Entsprechung zu Sequenzen $x_1, x_2, \dots, x_n, y \in P$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $n \geq 1$, $x_1, \dots, x_n$ *ist eine Antikette in P.*

(ii) $P \setminus \uparrow y = \bigcup_{i=1}^{n} \downarrow x_i$.

(iii) $\downarrow y \setminus \{y\} \subseteq \downarrow x_1$.

Mit dieser Notation ist $K = [a, b] = [\downarrow x_1, \bigcup_{i=1}^{n} \downarrow x_i]$ *ein Komplement eines maximalen Unterverbandes in* L.

3.3 Produkte von Komplementen maximaler Unterverbände

Aufgrund des Studiums einfacher und übersichtlicher Posets und deren dualen Verbänden bzw. den in den Verbänden enthaltenen Komplementen maximaler Unterverbände lässt sich leicht die Vermutung aufstellen, dass die genannten Komplemente stets in mindestens dreifacher Ausführung als direktes Produkt auftreten (vgl. dazu die Abbildungen 9, 10 und 11).
Im folgenden Kapitel wird dieser Sachverhalt, wieder unter Berücksichtigung der drei unterschiedenen Fälle, bewiesen. Dabei werden wir uns einer Konstruktion bedienen, mit Hilfe derer wir aus dem im Verband enthaltenen Komplement eines maximalen Verbandes und zweier verschiedener Elemente ausserhalb des Komplementes mindestens zwei weitere isomorphe Kopien des Komplementes konstruieren können, so dass als Endkonstrukt ein direktes Produkt von Komplementen maximaler Unterverbände resultiert. Dazu werden wir auch die Tatsache ausnützen, dass der Randpunkt a eines beliebigen Komplementes $[a, b]$ mindestens einen oberen und b mindestens einen unteren Nachbarn ausserhalb des Komplementes besitzen.

Die folgende Hilfsaussage aus [6] wird die Konstruktion des direkten Produktes ganz wesentlich vereinfachen:

Lemma 3.3.1.
Sei L *ein modularer Verband,* $a, b \in L$. *Dann ist der von* $[a \wedge b, a] \cup [a \wedge b, b]$ *erzeugte*[5] *Unterverband von* L, *bezeichnet mit* $[[a \wedge b, a] \cup [a \wedge b, b]]$, *isomorph zum Produkt* $[a \wedge b, a] \times [a \wedge b, b]$.

Beweis. vgl. [[6], Theorem IV.14]

□

Bemerkung 3.3.2. *Im distributiven Fall gilt sogar* $[[a \wedge b, a] \cup [a \wedge b, b]] = [a \wedge b, a \vee b]$.

Bemerkung 3.3.3. *Nach [3] ist* $[X]$ *der kleinste Unterverband von* L, *der* X *enthält. Wir sagen zudem,* L *sei von* X *erzeugt, wenn* $L = [X]$ *gilt.*

Korollar 3.3.4.
Sei L *ein modularer Verband,* $a, b \in L$, $x \leq a$, $a \| b$ *und* $x \prec b$. *Dann ist* $x = a \wedge b$ *und* $[[a \wedge b, a] \cup [a \wedge b, b]] \cong [a \wedge b, a] \times \mathbf{2}$.

Beweis. Da x offensichtlich die grösste untere Schranke von a und b ist, gilt $x = a \wedge b$.
Aus $x \prec b$ folgt unmittelbar $[x, b] \cong \mathbf{2}$, so dass mit dem vorangehenden

[5] Sei L ein Verband, $X \subseteq L$. Der von X erzeugte Unterverband $[X]$ ist nach [[4], Übung 5.5] definiert als $[X] = \bigcup\{X_k \mid k \in \mathbf{N}_0\}$, wobei $X_0 \doteq X$ und $X_{k+1} \doteq \{a \vee b \mid a, b \in X_k\} \cup \{a \wedge b \mid a, b \in X_k\}$.

Lemma 3.3.1 auch die zweite Aussage bewiesen ist.

□

Korollar 3.3.5.
Sei L ein distributiver Verband; $a, b, x \in L$, $a \prec x \prec b$. Dann ist $[a, b] \cong \mathbf{3}$ oder $[a, b] \cong \mathbf{2} \times \mathbf{2}$.

Beweis. Nach Voraussetzung muss sicher $|\,[a, b]\,| \geq 3$ gelten.

1. Fall: Sei $|\,[a, b]\,| = 3$. Genau dann ist $[a, b] = \{a, b, x\}$, was nach Voraussetzung $[a, b] \cong \mathbf{3}$ folgen lässt.

2. Fall: Sei $|\,[a, b]\,| = 4$. Also $\exists\, y \neq x$, $a < y < b$, d.h. aber auch $a \prec y \prec b$. Somit $[a, b] \cong \mathbf{2} \times \mathbf{2}$.

3. Fall: Sei $|\,[a, b]\,| = 5$. Folglich $\exists\, y_1, y_2 \in L$ mit $y_i \neq x$ für $i = 1, 2$ und $a < y_i < b$. Wegen $a \prec x \prec b$ muss für $i = 1, 2$ auch $y_i \| x$ gelten, da sonst oBdA $x < y_i < b$ resultieren würde, was ein Widerspruch zu $x \prec b$ wäre. Es gelte nun bereits $|\,[a, b]\,| = 4$, also $\{a, b, x, y_1\} = [a, b] \cong \mathbf{2} \times \mathbf{2}$. Für einen weiteren Punkt y_2 müsste entweder $a < y_2 < b$, $y_1 \| y_2$ oder oBdA $a < y_2 < y_1 < b$ gelten, so dass also entweder $\mathbf{M}_3$ oder $\mathbf{N}_5$ als Unterverbände in $[a, b]$ enthalten wären. Widerspruch zur Distributivität.

4. Fall: Sei $|\,[a, b]\,| \geq 6$: Aus den bisherigen Betrachtungen wird ersichtlich, dass in $[a, b] \setminus \{x\}$ $(x \in [a, b])$ keine Ketten mit vier und mehr Elementen vorkommen können, da sonst $\mathbf{N}_5$ als Unterverband in $[a, b]$ auftreten würde. Weiter kann höchstens eine Kette mit höchstens drei Elementen in $[a, b] \setminus \{x\}$ auftreten, da sonst $\mathbf{M}_3$ als Unterverband in $[a, b]$ enthalten ist.
Deshalb kann zusammengefasst nur $3 \leq |\,[a, b]\,| \leq 4$ gelten, womit sich die Behandlung des 3. und 4. Falles eigentlich erübrigt.

□

3.3.1 Der triviale Fall

Im trivialen Fall besteht das Komplement K eines maximalen Unterverbandes aus einem Element, das genau einen oberen und einen unteren Nachbarn a, b aufweist. Eine erste einfache Folgerung kann deshalb folgendermassen formuliert werden:

Lemma 3.3.6.
Sei $K = \downarrow x$ $(x \in L)$ ein Komplement eines maximalen Unterverbandes erster Art und $a, b \in L = \mathfrak{O}(P)$ mit $a \prec \downarrow x \prec b$. Es gilt:

$$K \subseteq [a, b] \cong L' = \mathbf{3} \times K \cong \mathbf{3} \subseteq L = \mathfrak{O}(P) \text{ oder}$$
$$K \subseteq [a, b] \cong L'' = \mathbf{2} \times \mathbf{2} \times K \cong \mathbf{2} \times \mathbf{2} \subseteq L = \mathfrak{O}(P).$$

Beweis. Wegen Korollar 3.3.5 gilt $[a,b] \cong \mathbf{3}$ oder $[a,b] \cong \mathbf{2} \times \mathbf{2}$. Schliesslich ist $\mathbf{3} \times \downarrow x$ isomorph zu $\mathbf{3}$ bzw. $\mathbf{2} \times \mathbf{2} \times \downarrow x$ isomorph zu $\mathbf{2} \times \mathbf{2}$.

□

3.3.2 Der zweite Fall

In Lemma 3.2.3 wurde nachgewiesen, dass das zweielementige Intervall $K = [\downarrow x_1, \downarrow x_1 \cup \downarrow x_2]$ $(x_1, x_2 \in P)$ mit gewissen einschränkenden Bedingungen an x_1 und x_2 ein Komplement eines maximalen Unterverbandes der zweiten Art ist. Im Beweis desselben Lemmas wird $\downarrow x_1 \cup \{y\}$ als ein oberer Nachbar von $\downarrow x_1$ bestätigt, welcher nicht im Komplement K liegt.

Definition 3.3.7.
Mit $c \in L = \mathfrak{O}(P)$ wollen wir den (eindeutig bestimmten) unteren Nachbarn von $\downarrow x_1$ bezeichnen und definieren anschliessend $z \doteq c \cup \downarrow x_2$.

Aufgrund der Definition gilt offenbar $\downarrow x_1 \not\subseteq c \subseteq \downarrow x_1 \cup \downarrow x_2$, also $z \parallel \downarrow x_1$. z ist sogar unterer Nachbar von $\downarrow x_1 \cup \downarrow x_2$. Diese Eigenschaft und der folgende Hilfssatz aus [2] werden es uns erlauben, Isomorphieeigenschaften zwischen verschiedenen Intervallen eines Verbandes, insbesondere zwischen Intervallen, welche Komplemente maximaler Unterverbände enthalten, zu formulieren.

Satz 3.3.8.
In jedem modularen Verband L sind die Abbildungen $\phi_a \colon x \mapsto x \wedge a$ und $\psi_b \colon y \mapsto y \vee b$ zueinander inverse Isomorphismen von $[b, a \vee b]$ nach $[a \wedge b, a]$ bzw. umgekehrt.

Beweis. vgl. [[2], Theorem I.13]

□

Damit gelangen wir für Komplemente maximaler Unterverbände der zweiten Art zum folgenden Satz:

Satz 3.3.9.
Jedes Komplement K eines maximalen Unterverbandes zweiter Art ist in einem direkten Produkt $L' = \mathbf{3} \times K \subseteq L$ oder $L'' = \mathbf{2} \times \mathbf{2} \times K \subseteq L$ enthalten.

Beweis. Setzen wir in unserem zweiten Fall $a \doteq z$ und $b \doteq \downarrow x_1$, so folgt wegen $x_1 \| x_2$ und der Supremum-Irreduzibilität von $\downarrow x_1$ einerseits $a \wedge b = c$ und andererseits auch $a \vee b = \downarrow x_1 \cup \downarrow x_2$, so dass wir nach dem vorhergehenden Satz 3.3.8 $[c, z] \cong [\downarrow x_1, \downarrow x_1 \cup \downarrow x_2]$ und deshalb

$$[c, z] \cong K \text{ erhalten.} \tag{1}$$

Betrachten wir nun Lemma 3.3.1, setzen dort $a \doteq \downarrow x_1 \cup \{y\}$ und $b \doteq z$ und beachten, dass $a \wedge b = c$ ist, so muss $[[c, \downarrow x_1 \cup \{y\}] \cup [c, z]] \cong [c, \downarrow x_1 \cup \{y\}] \times [c, z]$ gelten. Wegen der Voraussetzung $c \prec \downarrow x_1 \prec \downarrow x_1 \cup \{y\}$ kann das zugehörige Intervall nur isomorph zu $\mathbf{3}$ oder $\mathbf{2} \times \mathbf{2}$ sein, da gemäss Korollar 3.3.5 in den anderen Fällen $\mathbf{M}_3$ oder $\mathbf{N}_5$ als Unterverbände auftreten würden, was aufgrund der Distributivität des zugrundeliegenden Verbandes unmöglich ist. Also folgt mit (1)

$$[[c, \downarrow x_1 \cup \{y\}] \cup [c, z]] \cong \mathbf{3} \times K \text{ oder } [[c, \downarrow x_1 \cup \{y\}] \cup [c, z]] \cong \mathbf{2} \times \mathbf{2} \times K.$$

□

Beispiel 3.3.10. *Die Abbildungen 12 und 13 sollen als übersichtliche Beispiele die Konstruktionsweise dieses direkten Produktes und die Notationen aus Kapitel 3.3.2 veranschaulichen.*

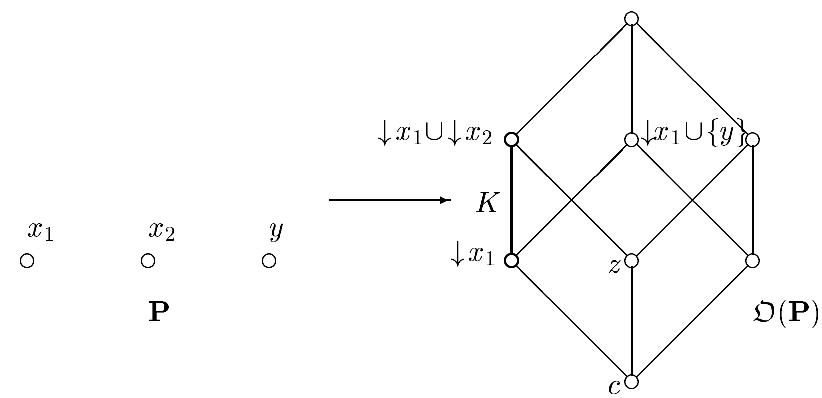


Abbildung 12: Ein Komplement K eines maximalen Unterverbandes zweiter Art, enthalten im direkten Produkt $\mathbf{2} \times \mathbf{2} \times K \subseteq L = \mathfrak{O}(P)$

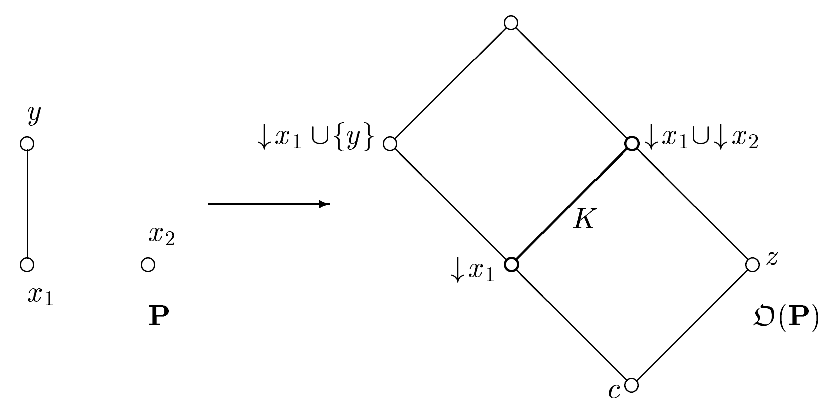


Abbildung 13: Ein Komplement K eines maximalen Unterverbandes zweiter Art, enthalten im direkten Produkt $\mathbf{3} \times K \subseteq L = \mathfrak{O}(P)$

Bemerkung 3.3.11. *In beiden Abbildungen werden die dualen Verbände sogar von* $X = [c, \downarrow x_1 \cup \{y\}] \cup [c, z]$ *erzeugt.*

3.3.3 Der dritte Fall

Der dritte Fall von Komplementen maximaler Unterverbände ergibt sich in ähnlicher Weise zum zweiten Fall. Dazu muss Definition 3.3.7 lediglich etwas umformuliert werden. Ansonsten kann das Vorgehen aus Kapitel 3.3.2 beibehalten werden.

Definition 3.3.12.
Sei $c \in L$ der untere Nachbar von $\downarrow x_1$, $K = [\downarrow x_1, \bigcup_{i=1}^{n} \downarrow x_i]$ ein Komplement eines maximalen Unterverbandes dritter Art. Setze $\tilde{z} \doteq c \cup \bigcup_{i=2}^{n} \downarrow x_i$.

Mit diesen Bezeichnungen folgt ein zu Satz 3.3.9 analoger Satz für Komplemente dritter Art mit dem identischen Beweis für $\tilde{z}$ anstelle von z.

Zusammenfassend ergibt sich also für alle Fälle von Komplementen maximaler Unterverbände das folgende allgemeine Resultat:

Theorem 2.
Sei $L = \mathfrak{O}(P)$ der duale (distributive) Verband einer endlichen teilgeordneten Menge P, K ein beliebiges Komplement eines maximalen Unterverbandes von L. Dann ist K in einem direkten Produkt $L' = \mathbf{3} \times K$ oder $L'' = \mathbf{2} \times \mathbf{2} \times K$ enthalten.

4 Poset-Kontraktionen und maximale Unterverbände

Die eigentliche und ursprüngliche Fragestellung dieser Diplomarbeit bestand darin, die in [1] aufgeworfene Bemerkung, welche eine offensichtliche Dualität zwischen den definierenden Bedingungen an Komplemente maximaler Unterverbände und denjenigen an Äquivalenzklassen von Posets bezüglich einer "Kontraktionsrelation" postuliert, eingehend zu untersuchen.
Besonderes Interesse sollte dabei der Frage gelten, ob sich zum Ausschneiden von Komplementen maximaler Unterverbände aus einem Verband eine "Entsprechung" in der Menge der Posets finden lässt bzw. welche Auswirkungen eine vertikale Poset-Kontraktion im zugehörigen dualen Verband zeigt. Als Nebenprodukt dieser Untersuchungen, das sich nun als ein eigentlicher Hauptteil der Arbeit präsentiert, ergab sich das, im dritten Kapitel bewiesene, doch überraschende Theorem 2.
Im folgenden Kapitel soll neben den Definitionen weiterer grundlegender Begriffe auch die Tatsache bewiesen werden, dass einer sogenannten vertikalen Poset-Kontraktion ein Ausschneiden von Komplementen maximaler Unterverbände aus dem dualen Verband entspricht. Eine Umkehrung dieser Aussage ist dabei nur mit zusätzlichen Bedingungen zu formulieren.

4.1 Kontraktionen von Posets

Die folgenden Definitionen sind der Veröffentlichung [[1], Def. 3.2] entnommen und sollen uns zum Begriff des "kontrahierten Posets" hinführen:

Definition 4.1.1.
*Sei P ein Poset, $p, q \in P$, $p \ngeq q$. Das Paar (p,q) wird **kritisch** genannt, wenn für beliebige Elemente $a, b \in P$ gilt:*

(i) Aus $a > p$ folgt $a \geq q$.
(ii) Aus $b < q$ folgt $b \leq p$.

Mit $M(P)$ bezeichnen wir die Menge aller kritischen Paare eines Posets P.

Definition 4.1.2.
*Sei P ein Poset, $M(P)$ die Menge aller kritischen Paare von P. Definiere $A(P) \doteq \{(p,q) \in M(P) \mid p < q\}$. Wir nennen den Poset P **vertikal kontrahiert** genau dann, wenn $A(P) = \emptyset$.*

Bemerkung 4.1.3. *Nach Bemerkung 3.4 aus [1] bestehen die nichttrivialen $\sim_v$-Klassen ($\sim_v$ bezeichne die schwächste Äquivalenzrelation, welche $A(P)$ enthält) aus Ketten $[a,b]$ mit $a \in \mathfrak{M}(L)$, $a \notin \mathfrak{J}(L)$ und $b \in \mathfrak{J}(L)$, $b \notin M(L)$ sowie x doppelt-irreduzibel, für alle $a < x < b$.*
$\sim_v$-Klassen sind somit, wie bereits erwähnt, dual zu Komplementen von maximalen Unterverbänden definiert.

Beispiel 4.1.4. *Anhand eines bekannten Beispiels aus den vorangehenden Abschnitten soll der intuitiv gut fassbare Begriff des vertikal kontrahierten Posets bzw. der vertikalen Kontraktion nähergebracht werden:*

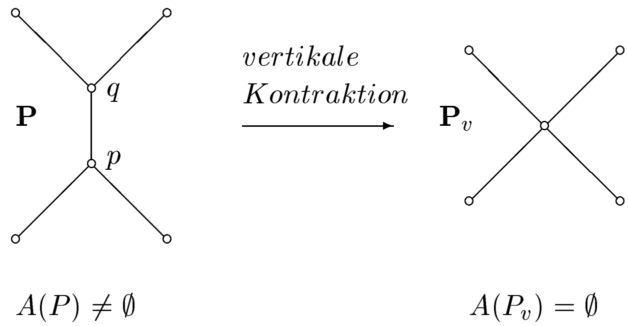


Abbildung 14: Beispiel einer vertikalen Kontraktion bzw. eines vertikal kontrahierten Posets

Bemerkung 4.1.5. *Offensichtlich handelt es sich bei einer vertikalen Poset-Kontraktion um eine ordnungserhaltende, surjektive Abbildung zwischen teilgeordneten Mengen.*

4.2 Poset-Kontraktionen und Komplemente maximaler Unterverbände

Eine Problemstellung, die sich unmittelbar aus der erläuterten Dualität zwischen den Äquivalenzklassen von (vertikal) kontrahierten Posets und den Komplementen maximaler Unterverbände ergibt, besteht darin, zu fragen, inwiefern einer vertikalen Poset-Kontraktion das Ausschneiden eines Komplementes eines maximalen Unterverbandes, also des Dualen einer $\sim_v$-Äquivalenzklasse, aus dem endlichen distributiven dualen Verband entspricht.
Im folgenden Kapitel werden wir mit $[a, b]$ eine $\sim_v$-Äquivalenzklasse bezeichnen, $K = [\downarrow x_i, \bigcup_{i=1}^{n} \downarrow x_i]$ sei ein beliebiges Komplement eines maximalen Unterverbandes im dualen Verband eines Posets, welcher $[a, b]$ enthält.

Zunächst eine nützliche Folgerung:

Lemma 4.2.1.
Zu jeder $\sim_v$-Äquivalenzklasse $[a, b]$ mit $m \geq 2$ verschiedenen Elementen existieren in ihrem dualen Verband mindestens $m-1$ Komplemente von maximalen Unterverbänden. Zudem ist $[a, b]$ offensichtlich nicht vertikal kontrahiert.

Beweis. Sei $[a, b] = \{a_1, a_2, ..., a_{m-1}, b\}$ eine beliebige $\sim_v$-Äquivalenzklasse mit $m \geq 2$ verschiedenen Elementen. Aufgrund der doppelten Irreduzibilität der Elemente aus $]a, b[$ ist $P \setminus (\downarrow a_i \cup \uparrow a_{i+1}) = P \setminus (\downarrow a_{m-1} \cup \uparrow b)$

($\forall i \in \{1, \dots, m-2\}$). Definiere eine Menge $X = \{x_2, \dots, x_n\}$, welche aus den maximalen Elemente in $P \setminus (\downarrow a_{m-1} \cup \uparrow b)$ bestehen soll.

Zeige: Die $m-1$ Intervalle der Form $[\downarrow a_i, \downarrow a_i \cup \bigcup_{j=2}^{n} \downarrow x_j]$ für $i = 1, \dots, m-1$ sind Komplemente maximaler Unterverbände, enthalten im dualen Verband des Posets, in welchem die $\sim_v$-Äquivalenzklasse $[a, b]$ liegt:

Sind die $\{x_2, \dots, x_n\}$ maximal in $P \setminus (\downarrow a_{m-1} \cup \uparrow b)$, so sind sie auch maximal in $P \setminus \uparrow b$. Sonst müsste ein $z \in P \setminus \uparrow b$ existieren mit oBdA $z > x_2$. Nach Voraussetzung und mit $\uparrow b \cap \downarrow a_{m-1} = \emptyset$ muss aber auch $z \in \downarrow a_{m-1}$ sein, was $a_{m-1} \geq z > x_2$ und damit $x_2 \in \downarrow a_{m-1}$ nach sich ziehen würde. Widerspruch.

1. Fall: Es sei $\mid P \setminus (\downarrow a_{m-1} \cup \uparrow b) \mid = 0$. Wegen $\downarrow a_i \cap \uparrow a_{i+1} = \emptyset$ ($\forall i \in \{1, \dots, m-2\}$) und $\downarrow a_{m-1} \cap \uparrow b = \emptyset$ gilt $P \setminus \downarrow a_i = \uparrow a_{i+1}$, resp. $P \setminus \downarrow a_{m-1} = \uparrow b$, womit Lemma 3.2.1 erfüllt ist. Also sind die Mengen $\downarrow a_i$ für $i = 1, \dots, m-1$ Komplemente eines maximalen Unterverbandes erster Art.

2. Fall: Es sei $\mid P \setminus (\downarrow a_{m-1} \cup \uparrow b) \mid = 1$ und damit $P \setminus (\downarrow a_{m-1} \cup \uparrow b) = \{x_2\}$. Da b supremum-irreduzibel ist, und $a_{m-1} \prec b$ gilt, muss $x_2 \not\prec b$ sein. Gemeinsam mit der Voraussetzung $x_2 \notin \uparrow b$ folgt $x_2 \| b$. Weiter muss auch $x_2 \not\geq a_{m-1}$ sein, da sonst wegen der Infimum-Irreduzibilität von a_{m-1} aus $x_2 \geq a_{m-1}$ entweder $x_2 = a_{m-1}$ oder $x_2 \geq b$ folgt, was ein Widerspruch ist. Also $x_2 \| x_1$. Andererseits ist x_2 aber auch minimal in $P \setminus \downarrow a_{m-1}$: Sonst würde z.B. ein $z \in P \setminus \downarrow a_{m-1}$ existieren mit $z < x_2$. Nach Voraussetzung müsste damit aber auch $z \in \downarrow a_{m-1} \cup \uparrow b$ und $z \in \uparrow b$ sein, da $z \in \downarrow a_{m-1}$ unmöglich ist. Somit wäre $x_2 > z \geq b$. Widerspruch.
Schlussendlich muss auch noch $P \setminus (\downarrow a_{m-1} \cup \downarrow x_2) = \uparrow b$ gelten, was aus $\downarrow a_{m-1} \cap \uparrow b = \emptyset$ und $\downarrow x_2 \cap \uparrow b = \emptyset$ unmittelbar folgt.
Anstelle von a_{m-1} und b kann der ganze vorangehende Beweisteil analog auch mit den Paaren a_i und a_{i+1} ($i = 1, \dots, m-2$) durchgespielt werden.
Lemma 3.2.3 ist daher erfüllt, und $K = [\downarrow a_i, \downarrow a_i \cup \downarrow x_2]$ für $i = 1, \dots, m-1$ als Komplemente von maximalen Unterverbänden zweiter Art nachgewiesen.

3. Fall: Es sei $\mid P \setminus (\downarrow a_{m-1} \cup \uparrow b) \mid \geq 2$. Die Elemente $a_{m-1}, x_2, \dots, x_n$ sind maximal in $P \setminus \uparrow b$, so dass die Aussagen (i) und (ii) aus Lemma 3.2.5 erfüllt sind.
Aussage (iii): $\downarrow b \cap [(\downarrow a_{m-1} \cup \bigcup_{i=2}^{n} \downarrow x_i) \setminus \downarrow a_{m-1}] = \emptyset$: Wäre $a \in \downarrow b$, $a \in (\downarrow a_{m-1} \cup \bigcup_{i=2}^{n} \downarrow x_i) \setminus \downarrow a_{m-1}$, so folgt $a \leq b$, $a \leq x_j$ ($j \in \{2, \dots, n\}$) und $a \notin \downarrow a_{m-1}$. Da b supremum-irreduzibel ist, gilt $a \leq a_{m-1}$. Widerspruch. Somit ist Lemma 3.2.5 erfüllt.

Indem wiederum a_{m-1} und b durch a_i und a_{i+1} $(i = 1, \ldots, m-2)$ ersetzt werden, folgern wir, dass $K = [\downarrow a_i, \downarrow a_i \cup \bigcup_{j=2}^{n} \downarrow x_j]$ Komplemente maximaler Unterverbände dritter Art darstellen.

□

Bemerkung 4.2.2. *$\downarrow b$ kann nur dann als linker Intervallrand eines Komplementes eines maximalen Unterverbandes gewählt werden, wenn im Poset ein zu b unvergleichbares Element y existiert, welches unterer Nachbar aller oberen Nachbarn von b ist, da sonst b nicht maximal in $P \setminus \uparrow y$ wäre.*

Anders gesagt: $\sim_v$-Äquivalenzklassen $[a, b[$ (evtl. sogar $[a, b]$) erfüllen für die in Lemma 4.2.1 gemachten Annahmen die in Lemmata 3.2.1, 3.2.3 und 3.2.5 gestellten Bedingungen an Posets, um Komplemente maximaler Unterverbände in ihren dualen Verbänden aufzuweisen.
Fortan wollen wir die "Länge" der $\sim_v$-Äquivalenzklassen etwas berücksichtigen und die folgenden zwei Fälle von $\sim_v$ −Äquivalenzklassen vertikal kontrahierter Posets betrachten. Der "triviale" Fall $|\,[a, b]\,| = 1$, d.h. $a = b$, ist für unsere spezifischen Betrachtungen zu vernachlässigen, da es sich dabei bereits um einen vertikal kontrahierten Poset handelt.

4.2.1 $\sim_v$-Äquivalenzklassen mit $|\,[a, b]\,| = 2$

Das Beispiel eines derartigen Posets ist in Abbildung 14 wiedergegeben. Gemäss Lemma 4.2.1 stellt das Intervall $K = [\downarrow a, \downarrow a \cup \bigcup_{j=2}^{n} \downarrow x_j]$ ein Komplement eines maximalen Unterverbandes dar, d.h. $\downarrow x_1 = \downarrow a$ ist das einzige supremum-irreduzible Element in K. $x_2, \ldots, x_n$ sind dabei wie im erwähnten Lemma definiert.
Ein Ausschneiden von K aus dem zugrundeliegenden Verband entspricht also aufgrund der Birkhoff-Dualität im dualen Poset einem Entfernen des linken Intervallrandes a der $\sim_v$-Äquivalenzklasse, womit $\{b\}$ und daher ein vertikal kontrahierter Poset resultiert.
Wir können also den folgenden Satz formulieren:

Satz 4.2.3.
Sei $[a, b]$ die einzige $\sim_v$-Äquivalenzklasse eines Posets P mit $|\,[a, b]\,| = 2$, $L = \mathfrak{O}(P)$ der duale Verband. Dann existiert ein Komplement K eines maximalen Unterverbandes in L, nämlich z.B. $K = [\downarrow a, \downarrow a \cup \bigcup_{j=2}^{n} \downarrow x_j]$, so dass $\mathfrak{J}(L \setminus K)$ vertikal kontrahiert ist.

Bemerkung 4.2.4. *Die Voraussetzung in Satz 4.2.3, nur Posets mit einer einzigen $\sim_v$-Äquivalenzklasse zuzulassen, stellt keine einschneidende Einschränkung dar, da Posets mit mehreren $\sim_v$-Äquivalenzklassen schrittweise auf Posets mit lediglich einer $\sim_v$-Äquivalenzklasse zurückgeführt werden können.*

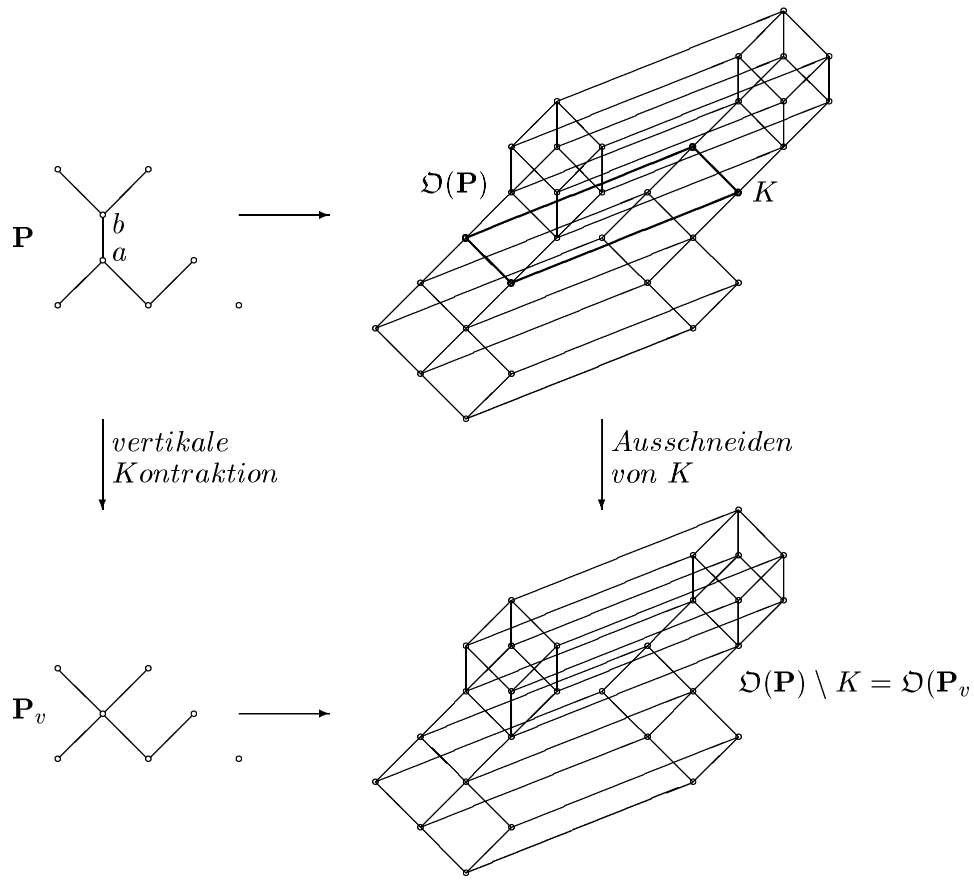


Abbildung 15: Eine vertikale Kontraktion und das Entfernen eines Komplementes eines maximalen Unterverbandes der dritten Art

Beispiel 4.2.5. *Abbildung 15 zeigt einen Poset P, der einen dualen Verband $\mathfrak{O}(P)$ induziert, welcher ein Komplement (fett markiert) eines maximalen Unterverbandes dritter Art aufweist. Gleichzeitig besitzt P eine Kette $[a, b]$ mit $]a, b[= \emptyset$, welche eine $\sim_v$-Äquivalenzklasse von kontrahierten Posets des ersten Falles darstellt. Man beachte nun das Zusammenwirken der ausgeführten vertikalen Poset-Kontraktion und dem Ausschneiden des Komplementes K aus dem dualen Verband.*

4.2.2 $\sim_v$-Äquivalenzklassen mit $|[a, b]| \geq 3$

Als Beispiel einer derartigen Äquivalenzklasse diene die teilgeordnete Menge in Abbildung 16.
Gemäss Lemma 4.2.1 weist der duale Verband eines Posets, welcher eine $\sim_v$-Äquivalenzklasse mit mindestens $n \geq 3$ Elementen enthält, mindestens zwei Komplemente von maximalen Unterverbänden auf. Jedem Element aus $[a, b[$ (evtl. sogar aus $[a, b]$) wird kraft der Birkhoff-Dualität genau ein Komple-

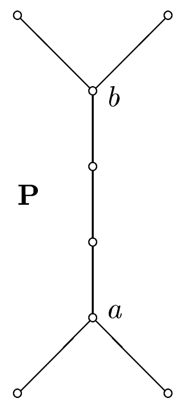


Abbildung 16: Eine $\sim_v$-Äquivalenzklasse der zweiten Art

ment eines maximalen Unterverbandes zugeordnet, welches nach Voraussetzung genau ein supremum-irreduzibles Element besitzt. Einer Kontraktion von $[a, b]$ entspricht im dualen Verband daher ein Ausschneiden einer Mengenvereinigung von $n - 1$ Komplementen maximaler Unterverbände:

Satz 4.2.6.
Sei $[a, b]$ die einzige $\sim_v$-Äquivalenzklasse mit $|[a, b]| \geq 3$, $L = \mathfrak{O}(P)$ der duale Verband eines Posets mit $[a, b] \subseteq P$. Dann existiert eine Menge $\tilde{K}$, so dass $\mathfrak{J}(L \setminus \tilde{K})$ vertikal kontrahiert ist.

Beweis. Sei $[a, b] = \{a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, b\}$ eine $\sim_v$-Äquivalenzklasse und $m \geq 3$. Setze $\tilde{K} \doteq \bigcup_{i=1}^{m-1} [\downarrow a_i, \downarrow a_i \cup \downarrow x_2 \cup \ldots \cup \downarrow x_n]$. Dabei sind $x_2, \ldots, x_n$ gemäss Lemma 4.2.1 definiert.
Nach Lemma 4.2.1 sind alle Intervalle $[\downarrow a_i, \downarrow a_i \cup \downarrow x_2 \cup \ldots \cup \downarrow x_n]$ Komplemente von maximalen Unterverbänden in $\mathfrak{O}(P)$, also ist jeweils nur $\downarrow a_i$ supremum-irreduzibel in L und damit $a_i \in [a, b] \subseteq \mathfrak{J}(L) = P$. Somit wird beim Ausschneiden eines jeden derartigen Intervalls lediglich ein Element a_i aus $[a, b] \subseteq P$ entfernt, womit oBdA $b \in [a, b]$ übrigbleibt, so dass $[a, b]$ damit tatsächlich vertikal kontrahiert ist.

□

In Abbildung 17 ist ein Poset P wiedergegeben, aus dessen dualem Verband $\mathfrak{O}(P)$ als Folge der vertikalen Poset-Kontraktion eine Mengenvereinigung $K_1 \cup K_2$ von zwei Komplementen maximaler Unterverbände M_1 und M_2 entfernt wird. Offenbar entspricht dies genau dem Übergang von $\mathfrak{O}(P)$ zum Mengendurchschnitt $M_1 \cap M_2$.

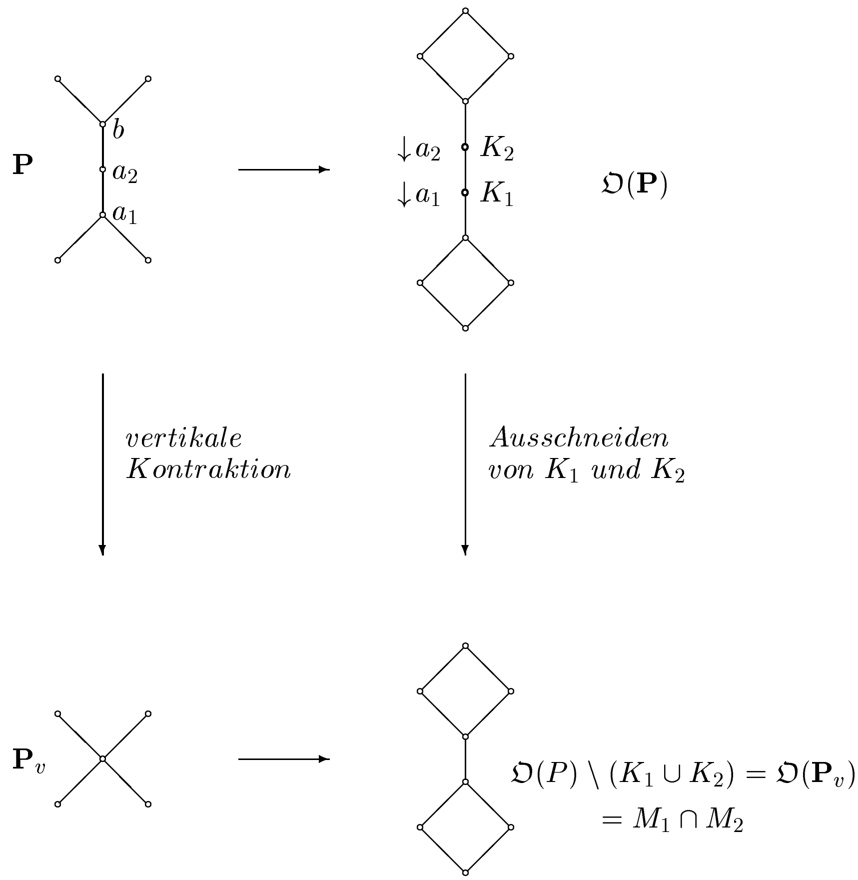


Abbildung 17: Vertikale Kontraktion und das Entfernen einer Mengenvereinigung von Komplementen maximaler Unterverbände

Damit sind wir in der Lage, das folgende grundlegende Theorem zu formulieren, das gleichzeitig auch die Frage beantwortet, inwiefern sich eine vertikale Poset-Kontraktion und ein Ausschneiden von Komplementen maximaler Unterverbände aus einem endlichen distributiven Verband entsprechen:

Theorem 3.
Sei P ein Poset, $L = \mathfrak{O}(P)$ der duale Verband und $f_v : P \longrightarrow P_v$ eine vertikale Kontraktion. Dann existieren maximale Unterverbände $M_1, \ldots, M_n$ von L, so dass $\mathfrak{O}(P_v) = \bigcap_{i=1}^{n} M_i$ gilt.

Bemerkung 4.2.7. *Offensichtlich ist die Umkehrung von Theorem 3 im Allgemeinen falsch, wie dies Abbildung 18 zeigt. Dort entspricht das Ausschneiden eines Komplementes eines maximalen Unterverbandes nicht einer*

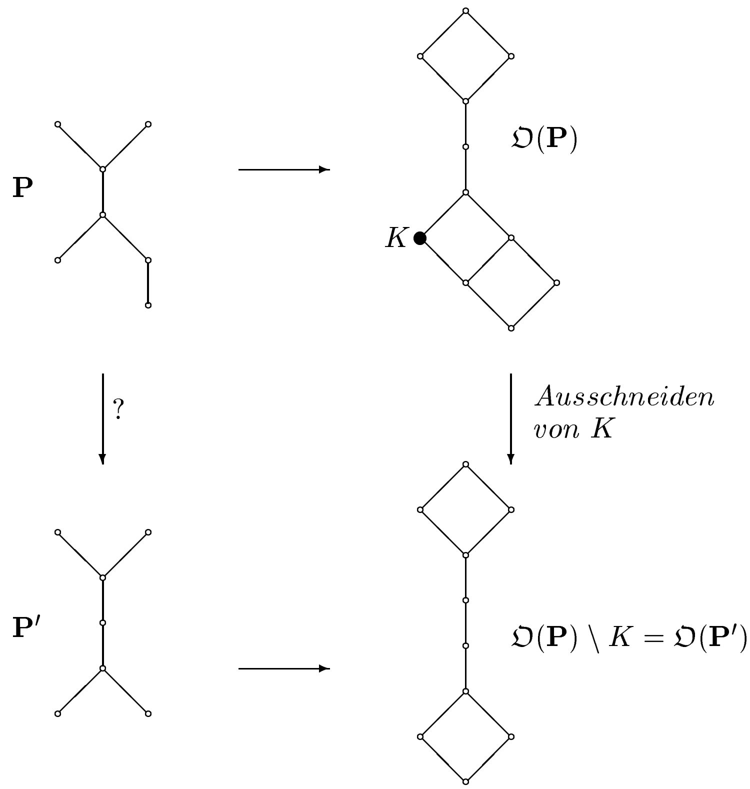


Abbildung 18: Die Umkehrung von Theorem 3 ist falsch.

üblichen vertikalen Poset-Kontraktion.

In der nachstehenden Folgerung aus Theorem 3 wollen wir unser Augenmerk auf die strukturerhaltenden Abbildungen von Posets bzw. Verbänden legen:

Korollar 4.2.8.
Zur surjektiven ordnungserhaltenden Abbildung der vertikalen Poset-Kontraktion $f_v : P \longrightarrow P_v$ existiert ein injektiver Verbands-Homomorphismus, die kanonische Inklusionsabbildung $\iota : \bigcap_{i=1}^{n} M_i \hookrightarrow L$, gegeben durch $\iota(x) \doteq x$ ($\forall x \in \bigcap_{i=1}^{n} M_i$).

4.3 Durchschnitte von maximalen Unterverbänden

Um nun mögliche Umkehrungen bzw. Bedingungen für Umkehrungen von Theorem 3 zu formulieren, wollen wir unser technisches Instrumentarium mit weiteren Definitionen aus [1] ergänzen.

Definition 4.3.1.
L sei ein endlicher distributiver Verband, $M_1, \ldots, M_n$ sämtliche echten maximalen Unterverbände von L. Wir nennen $\Phi(L)$ den ***Frattini-Unterverband*** *von L und setzen $\Phi(L) \doteq \bigcap_{i=1}^{n} M_i$.*

Es stellt sich nun unmittelbar die Frage, unter welchen Bedingungen an einen endlichen distributiven Verband ein Entfernen der Vereinigung **aller** Komplemente maximaler Unterverbände, also dem Übergang von L nach $\Phi(L)$, einer "echten" vertikalen Poset-Kontraktion entspricht. Mithilfe der Hilfsmittel aus [1] kann gezeigt werden, dass dies **nie** der Fall ist.

Definition 4.3.2.
Seien $p, q \in P$, $p \not\geq q$ und (p, q) kritisch (vgl. Definition 4.1.1). In Ergänzung zu Definition 4.1.2 definieren wir die folgenden Mengen:

(i) $B(P) \doteq \{(p,q) \in M(P) \mid p \| q\}$,
(ii) $C(P) \doteq \{(p,q) \in B(P) \mid (q,p) \in B(P)\}$,
(iii) $B'(P) \doteq B(P) \setminus C(P)$.

Einen Poset P nennen wir ***horizontal kontrahiert*** *genau dann, wenn $C(P) = \emptyset$ gilt.*

Nach einer Bemerkung zu Korollar 3.12 aus [1] ist ein Poset Q genau dann dual zum Frattini-Unterverband $\Phi(L)$, d.h. $Q = \mathfrak{J}(\Phi(L))$, wenn Q aus dem dualen Poset $P = \mathfrak{J}(L)$ erreicht werden kann, indem man $\mathfrak{J}(L)$ zuerst vertikal, anschliessend horizontal kontrahiert und schliesslich gewisse Paare aus B' zur Ordnung des erhaltenen Posets hinzufügt. Somit entspricht der Übergang von L nach $\Phi(L)$ genau dann einer echten vertikalen Kontraktion, wenn der vertikal kontrahierte Poset P_v bereits horizontal kontrahiert ist, d.h. $C(P_v) = \emptyset$ gilt, sowie keine Elemente in $B'(P_v)$ existieren.

Das folgende Lemma besagt, dass dies für $\sim_v$-Äquivalenzklassen $[a, b]$ nie der Fall ist:

Lemma 4.3.3.
Sei $[a, b]$ eine beliebige $\sim_v$-Äquivalenzklasse eines Posets P.
Für jede vertikal kontrahierte $\sim_v$-Äquivalenzklasse $[a, b]_v$ ist $C([a, b]_v) \neq \emptyset$ oder $B'([a, b]_v) \neq \emptyset$.

Beweis. Seien p, q zwei verschiedene obere Nachbarn von b. Würde $C([a, b]_v) = \emptyset$ wie auch $B'([a, b]_v) = \emptyset$ gelten, so wäre auch $B([a, b]_v) = \emptyset$, da sonst $\emptyset = B' = B \setminus C = B \setminus \emptyset = B \neq \emptyset$ gelten würde. Wähle nun $\tilde{p}$ als maximales Element in $\uparrow p$ mit $\tilde{p} \not\geq q$.
Somit gilt $(\tilde{p}, q) \in B$: Offensichtlich ist $p \| q$. Weiter muss aus $a > \tilde{p}$ auch $a \geq q$ folgen, da $\tilde{p}$ sonst nach Voraussetzung nicht maximal gewählt worden wäre. Schliesslich folgt wegen $p \leq \tilde{p}$ aus $b < q$ auch $b \leq \tilde{p}$, da p, q gemeinsame untere Nachbarn besitzen. Widerspruch.

Per Dualität kann auch eine Version des Lemmas für untere Nachbarn von $a \in [a,b]$ bewiesen werden.

□

Eine vertikal kontrahierte $\sim_v$-Äquivalenzklasse muss also immer noch horizontal kontrahiert werden bzw. ihre Ordnung muss mit zusätzlichen Elementen ausgestattet werden, damit der resultierende Post dual zum Frattini-Unterverband ist. Somit können wir als Folgerung den folgenden Satz formulieren:

Satz 4.3.4.
Sei L ein endlicher distributiver Verband, $\Phi(L)$ der Frattini-Unterverband und $[a,b]$ eine $\sim_v$- Äquivalenzklasse im dualen Poset $P = \mathfrak{J}(L)$. Der Übergang von L nach $\Phi(L)$ entspricht nie einer echten vertikalen Poset-Kontraktion von $[a,b]$.

Folglich ist die Frage aufgeworfen, **welche** (und allenfalls wieviele) Komplemente maximaler Unterverbände aus einem Verband entfernt werden müssen, damit auf der Seite der Posets eine vertikale Kontraktion resultiert. Vorerst wollen wir die in [9] erläuterte Charakterisierung von maximalen Unterverbänden und deren Komplementen mit der Hilfe von kritischen Paaren aus dem dualen Poset betrachten.

Lemma 4.3.5.
P sei ein Poset, $L = \mathfrak{O}(P)$ der zugehörige duale Verband und M ein maximaler Unterverband von L. Es existiert ein eindeutiges kritisches Paar $(x,y) \in P$, so dass

$$M \cong \{U \in L \mid y \in U \Longrightarrow x \in U\} \text{ bzw.}$$
$$K = L \setminus M \cong \{U \in L \mid y \in U, x \notin U\} \text{ gilt.}$$

Umgekehrt bestimmt jedes kritische Paar $(x,y) \in P$ auf diese Weise einen maximalen Unterverband in L.

Beweis. vgl. [[9], (1) und (2)]

□

Da in jeder $\sim_v$-Äquivalenzklasse $[a,b] = \{y, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}$ mit $y \prec x_1 \prec x_2 \prec \ldots \prec x_{n-1}$ die Paare $(x_1,y),(x_2,x_1),\ldots,(x_{n-1},x_{n-2})$ offenbar kritisch sind, kann nach dem vorangehenden Lemma der Reihe nach jedem dieser $n-1$ Paare ein maximaler Unterverband M_i bzw. ein Komplement $K_i = L \setminus M_i$ $(i = 1,\ldots,n-1)$ zugeordnet werden.
Der linke Intervallrand eines Komplementes K_i besteht nach [9] aus dem (supremum-irreduziblen) Element $\downarrow y$ $(i = 1)$ bzw. $\downarrow x_{i-1}$ $(i = 2,\ldots,n-1)$ (vgl. jeweils die zweite Komponente der kritischen Paare). Das Entfernen dieser $n-1$ Komplemente aus dem Verband oder äquivalent dazu der Übergang von L zu $\bigcap_{i=1}^{n-1} M_i$ entspricht also dem Entfernen der Menge $\{y, x_1, \ldots, x_{n-2}\}$ aus dem Intervall $[a,b]$, somit einer vertikalen Poset-Kontraktion von $[a,b]$.

Satz 4.3.6.
P sei ein Poset, $L = \mathfrak{D}(P)$ der zugehörige duale Verband, $[a, b]$ eine beliebige $\sim_v$-Äquivalenzklasse in P mit n Elementen und $M_i \cong \{U \in L \mid y_i \in U \Longrightarrow x_i \in U\}$ seien m maximale Unterverbände von L. Der Übergang von L zum Durchschnitt $\bigcap_{i=1}^{m} M_i$ entspricht genau dann einer vertikalen Poset-Kontraktion von $[a, b]$, wenn für alle $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ gilt:

- *(i)* $m = n - 1$,
- *(ii)* (x_i, y_i) *kritisch,*
- *(iii)* $y_i \prec x_i$,
- *(iv)* $\{y_i, x_i\} \subseteq [a, b]$ *und*
- *(v)* $\bigcup_{i=1}^{n-1} \{x_i\} =]a, b]$.

Mit anderen Worten: Um eine vertikale Poset-Kontraktion der $\sim_v$-Äquivalenzklasse $[a, b]$ zu erhalten, sollen all diejenigen Komplemente aus dem dualen Verband entfernt werden, deren zugehörigen maximalen Unterverbände gemäss Lemma 4.3.5 von (benachbarten) kritischen Paaren in $[a, b]$ induziert sind. Da $[a, b]$ genau $n - 1$ derartige Paare aufweist, beträgt die Zahl auszuschneidender Komplemente mindestens $n - 1$.

In der Sprache der strukturerhaltenden Abbildungen formuliert, erhalten wir mit den Bedingungen und der Notation aus Satz 4.3.6 das folgende Abbildungsschema:

$$
\begin{tikzcd}
P = \mathfrak{J}(\mathfrak{D}(P)) \arrow[r, shift left] \arrow[d, "f_v"'] & L = \mathfrak{D}(P) \arrow[l, shift left] \\
P_v \arrow[r, shift left] & \mathfrak{D}(P_v) = \bigcap_{i=1}^{m} M_i \arrow[l, shift left] \arrow[u, "\subseteq", "\iota"']
\end{tikzcd}
$$

Abbildung 19: Durchschnitte von maximalen Unterverbänden im Zusammenspiel mit Poset-Kontraktionen

5 Ein kleiner Ausblick

Trotz den für mich in ihrer Einfachheit überraschenden Resultate, welche teilweise nach erheblichen Umwegen erreicht wurden, und der unzähligen Versuche der vergangenen Wochen, mathematische Gesetzmässigkeiten aus Handskizzen von endlichen distributiven Verbänden und deren dualen Posets aufzuspüren, ergaben sich im Laufe der Arbeit einige (neue) Fragen, die im Rahmen dieser Diplomarbeit offen bleiben:

- Welche Rolle spielen die in [1] ebenfalls definierten horizontalen Kontraktionen bezüglich des Ausschneidens von Komplementen maximaler Unterverbände aus ihren dualen Verbänden?
- Wie sehen die Klassen von Posets aus, deren dualen Verbände aufgrund des Entfernens einer beliebigen Auswahl von Komplementen maximaler Unterverbände entstehen?
- Kann ein zu Theorem 3 analoger Satz für nicht-distributive oder nicht-endliche Verbände, also unter Verzicht der Birkhoff-Dualität, formuliert werden?
- Welche strukturellen Aussagen lassen sich über die Menge von denjenigen maximalen Unterverbänden machen, welche als Durchschnitt dual zu einem vertikal kontrahierten Poset auftreten?

Literatur

[1] Adams, M.E., Dwinger, Ph., Schmid, J., *Maximal sublattices of finite distributive lattices*, Algebra Universalis **36** (1996), No.4, 488-504

[2] Birkhoff, G., *Lattice theory*, 3rd edition, Coll. Publ., XXV, Amer. Math. Soc., Providence, 1967

[3] Crawley, P., Dilworth, R.P., *Algebraic theory of lattices*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs N.J., 1973

[4] Davey, B.A., Priestley, H.A., *Introduction to Lattices and Order*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990

[5] Ganter, B., Wille, R., *Formale Begriffsanalyse*, Springer, Berlin, 1996

[6] Grätzer, G., *General Lattice Theory*, Birkhäuser, Basel, 1978

[7] Rival, I., *Maximal sublattices of finite distributive lattices*, Proc. Amer. Math. Soc. **37** (1973), 417-420

[8] Rival, I., *Maximal sublattices of finite distributive lattices. II*, Proc. Amer. Math. Soc. **44** (1974), 263-268

[9] Schmid, J., *On maximal sublattices of finite lattices*, Discrete Math. **199** (1999), 151-159